Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова
==
Химический факультет

Утверждено учебно-методической
комиссией химического факультета
М Г У

Б.П.Демидович, В.П.Моденов

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО КУРСУ "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

(Издание П, дополненное)

Ответственный редактор
доцент А.М.Полосуев

М о с к в а - I 9 7 6

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая брошюра является краткой методической разработкой по курсу " Уравнения математической физики". В процессе работы над ней были использованы лекции Б.П.Демидовича, прочитанные им в 1964/65 учебном году для студентов 3-го курса химического факультета МГУ. Материал лекций соответствует части программы курса высшей математики для химических факультетов университетов, относящейся к IУ семестру, и рассчитан на 2 часа лекций и I час упражнений в течение семестра.

В разработке изложены лишь основы теории, причем доказательства в некоторых местах для облегчения понимания даются не в строгой трактовке. В частности, остаются без исследования вопросы сходимости рядов.

Во второе издание включен некоторый дополнительный материал, а также упражнения, при составлении которых был использован сборник В.П.Моденова, "Задачи по уравнениям математической физики". Изд-во хим. фак-та МГУ, 1964 г. При нумерации формул указывается номер параграфа и номер формулы, например (3.2). Это вторая формула из § 3.

Авторы

ГЛАВА I

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ I. Ортогональные системы функций и обобщенные ряды Фурье

I. Определения.

Две действительные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на промежутке (а, в), если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0. \qquad (I.I)$$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется ортогональной на промежутке (а, b), если функции этой системы попарно ортогональны между собой, т.е.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \text{ при } n \neq m \qquad (I.2)$$

Под нормой функции $\varphi(x)$ на данном промежутке понимается квадратный корень из соответствующего интеграла от квадрата этой функции и обозначается

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx} \qquad (I.3)$$

Система функций называется нормированной, если норма каждой функции равна единице.

Ортогональная нормированная система называется ортонормированной. Для нее выполняются условия

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \qquad (I.4)$$

Введем символ Кронекера -числовую функцию

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \qquad (I.5)$$

Тогда для ортонормированной системы характеризующие ее соотношения можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \delta_{nm}. \qquad (I.6)$$

Комплексные функции

$f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$, $g(x) = \alpha_1(x) + i\beta_1(x)$,

($\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ - действительны, $i^2 = -1$,) называются ортогональными на промежутке (a, b), если

$$\int_a^b f(x)\,\bar{g}(x)\,dx = 0,$$

где

$$\bar{g}(x) = \alpha_1(x) - i\beta_1(x)$$

-сопряженная функция. В этом случае норма функции определяется формулой

$$\|f(x)\| = \left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2},$$

где

$$|f(x)| = \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^2(x)}$$

-модуль функции $f(x)$.

2. Нормирование ортогональной системы функций

Лемма. Всякую ортогональную систему, не содержащую функций с нулевой нормой, можно нормировать умножением её членов на подходящие множители (нормирующие множители).

Доказательство. Пусть в промежутке $a \le x \le b$ задана ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$. Введем новые функции $\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n(x)\|}$. Полученная таким образом система $\{\psi_n(x)\}$ будет ортонормированной. Действительно,

$\|\varphi_i\| \neq 0$

$$\int_a^b \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \frac{1}{\|\varphi_n(x)\|\,\|\varphi_m(x)\|}\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x) = \delta_{nm}.$$

3. Обобщенные ряды Фурье

Пусть некоторая функция $f(x)$, заданная в промежутке $a \le x \le b$ допускает разложение в ряд по ортогональной в этом промежутке системе функций $\{\varphi_n(x)\}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{I.7}$$

Найдем численные коэффициенты c_n, предполагая равномерную сходимость ряда. Для этого умножим обе части (I.7) на $\varphi_m(x)$ ($m = 1, 2, \ldots$) и проинтегрируем по промежутку (a, b), считая, что ряд, стоящий справа, можно интегрировать почленно (ввиду его равномерной сходимости)

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx$$

В силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ на (a, b), получаем вместо ряда единственный член, соответствующий $n=m$. Следовательно, заменяя m на n будем иметь:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}, \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (1.8)$$

Коэффициенты C_n, определяемые по этим формулам, называются <u>коэффициентами Фурье</u> функции $f(x)$ относительно данной ортогональной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Функциональный ряд (1.7) с коэффициентами Фурье (1.8) называется <u>рядом Фурье</u> функции $f(x)$ независимо от его сходимости. Следовательно, функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x).$$

При определенных предположениях относительно функции $f(x)$, ряд Фурье этой функции будет сходиться и его сумма будет равна $f(x)$.

§ 2. <u>Тригонометрические ряды Фурье</u>

1. <u>Тригонометрическая система функций и ее ортогональность</u>.

Рассмотрим систему тригонометрических функций с общим периодом $T=2l$:

$$\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right\} \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (2.1)$$

<u>Лемма</u>. Система тригонометрических функций ортогональна на любом промежутке, длина которого равна общему периоду этих функций.

<u>Доказательство</u>. Пусть C – любое действительное число и $(C, C+2l)$ любой промежуток длины $2l$. В дальнейшем для определенности мы будем брать $C=-l$, т.е. роль промежутка $(C, C+2l)$ будет у нас играть промежуток $(-l, l)$. В силу определения ортогональности (1.2) мы должны убедиться, что интеграл по этому промежутку от произведения любых двух различных функций системы (2.1) равен нулю, т.е. $\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=0,\ n\neq m,$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=0,\quad \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=0,\ n\neq m, \qquad (2.2).$$

$(n=0,1,2,\ldots;\ m=0,1,2,\ldots)$.

Докажем, например, первое соотношение: $\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx =$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left[\cos\frac{(n-m)\pi x}{\ell}+\cos\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{\ell}+\frac{\ell}{(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{\ell}\right]\Bigg|_{-\ell}^{\ell}=0.$$

Остальные соотношения получаются аналогично.

Замечание. Вычислим квадрат нормы этих функций на промежутке $(-\ell,\ell)$ $\quad \|1\|^2=\int_{-\ell}^{\ell}1^2dx=2\ell;$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right\|^2=\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{\ell}\right)dx=\ell,\ n=1,2,\dots \tag{2.3}$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right\|^2=\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{\ell}\right)dx=\ell,\ n=0,1,2,\dots$$

Можно показать, что интеграл от любой функции $\varphi(x)$ периода T по любому промежутку длины T не зависит от начала этого промежутка, т.е. величина интеграла $\int_{c}^{c+T}\varphi(x)\,dx$ не зависит от C. Поэтому, полученные выше формулы (2.2) и (2.3) имеют место при интегрировании по любому промежутку $(C,\ C+2\ell)$ длины равной периоду функции $T = 2\ell$.

2. Тригонометрический ряд Фурье

Предположим, что некоторая функция $f(x)$, определена в промежутке $(-\ell,\ \ell)$, а затем при остальных значениях x продолжена по закону периодичности с периодом $T = 2\ell$. Пусть $f(x)$ допускает тригонометрическое разложение в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{2.4}$$

Коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n этого тригонометрического ряда Фурье вычисляются по формулам (I.8) с использованием соотношений (2.3) и имеют следующий вид:

$$\left.\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}\end{matrix}\right.dx,\ n=0,1,2,\dots \tag{2.5}$$

Отметим частный случай $T = 2\pi$ ($\ell = \pi$), когда коэффициенты Фурье считаются по формуле

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left\{\begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix}\right. dx, \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.6)$$

Мы предполагали, что заданная функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд Фурье (2.4) с коэффициентами (2.5). Какой должна быть функция $f(x)$, заданная в промежутке $(-\ell,\ell)$, чтобы ее тригонометрический ряд Фурье сходился и представлял функцию $f(x)$? На этот вопрос дает ответ теорема сходимости для тригонометрических рядов Фурье, которую мы сейчас сформулируем.

3. Теорема сходимости

Дадим некоторые определения. Функция называется кусочно-непрерывной на данном промежутке, если: I) она ограничена на этом промежутке и 2) имеет на нем конечное число точек разрыва, причем все точки разрыва 1. рода.

Пусть дана периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2\ell$. Промежуток $(-\ell,\ell)$ при $\ell = \frac{T}{2}$ называется основной областью. Для этой функции можно построить тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Теорема. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в основной области и имеет кусочно-непрерывную первую производную, то:
I) её соответствующий тригонометрический ряд Фурье сходится для любого значения аргумента;
2) сумма $S(x)$ тригонометрического ряда Фурье равна функции $f(x)$ в точках ее непрерывности и равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа в точках разрыва функции, т.е.
$S(x)=f(x)$, где x -точка непрерывности и
$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ где x -точка разрыва.

Так как в точках непрерывности x функции $f(x)$ выполнены равенства

$$f(x-0)=f(x+0)=f(x),$$

то для суммы $S(x)$ имеем общую формулу

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right].$$

Это одна из основных теорем теории рядов Фурье. Доказательство этой теоремы мы здесь не приводим.

4. Лемма об интеграле четной и нечетной функции

Функция называется четной, если она не меняет своего значения при изменении знака аргумента, т.е. $f(-x)=f(x)$. Функция называется нечетной, если при изменении знака аргумента она меняет знак на обратный, сохраняя абсолютную величину, т.е.

$$f(-x)=-f(x)$$

При вычислении коэффициентов Фурье полезно пользоваться следующей леммой:

Лемма: Интеграл в симметричных пределах от четной функции равен удвоенному интегралу по половине отрезка интегрирования; от нечетной функции равен нулю, т.е.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ - четная;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ - нечетная.} \end{cases} \qquad (2.7)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\int_{-\ell}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\ell} f(x)dx.$$

Положим в первом интеграле $x=-\xi$, $dx=-d\xi$. Получим

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=-\int_{\ell}^{0} f(-\xi)d\xi+\int_{0}^{\ell} f(x)dx=\int_{0}^{\ell} f(-\xi)d\xi+\int_{0}^{\ell} f(x)dx=$$

$$=\int_{0}^{\ell}\left[f(-x)+f(x)\right]dx=\begin{cases} 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ -четная функция,} \\ 0; & \text{если } f(x) \text{ -нечетная функция.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

5. Тригонометрические ряды Фурье четных и нечетных функций

Теорема. Тригонометрический ряд Фурье четной периодической функции содержит только косинусы кратных дуг. Тригонометрический ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы кратных дуг.

Доказательство. Допустим, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье (2.4) с коэффициентами (2.5).

Если $f(x)$ – четная функция, то применяя лемму (2.7) к интегралам (2,5), определяющим коэффициенты Фурье, мы получаем:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx;\ (n=0,1,\dots) \quad (2.8)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=0,\ (n=1,2,\dots); \quad (2.9)$$

так как в первом случае под знаком интеграла стоит произведение четной функции на четную, т.е. четная функция, а во втором случае – произведение четной функции на нечетную, т.е. нечетная функция. Следовательно, для четной функции имеет место разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} \quad (2.10)$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то в силу предыдущей леммы для коэффициентов Фурье аналогично имеет

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=0,\ (n=0,1,2\dots) \quad (2.11)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad (2.12)$$
$$(n=1,2,\dots).$$

Разложение самой функции будет вида:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (2.13)$$

Тем самым теорема доказана.

В случае, если функция $f(x)$ периода $T=2\pi$ ($\ell=\pi$), полученные выше формулы принимают вид:

для четной функции

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad (2.14)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ (n=0,1,\dots) \quad (2.15)$$

для нечетной функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad (2.16)$$
$$\pi$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \ (n=1,2...) \qquad (2.17)$$

6. Четное и нечетное продолжение функции

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана только на участке $0<x<l$. Для разложения этой функции в ряд Фурье, ее надо продолжить на промежуток $-l<x<0$. Это можно сделать различными способами. Например, эту функцию можно разложить в промежутке $(0, l)$ как в ряд вида (2.10) по косинусам кратных дуг с коэффициентами (2.11), так и ряд вида (2.13) по синусам кратных дуг с коэффициентами (2.12). Оба эти ряда внутри промежутка $(0, l)$ будут иметь суммой функцию $f(x)$ или среднее арифметическое в точках разрыва. Но вне промежутка они будут представлять совершенно различные функции: ряд по косинусам даст функцию, получающуюся из $f(x)$ четным продолжением в соседний промежуток $(-l, 0)$, а затем периодическим продолжением с периодом $T = 2l$ вне промежутка $(-l, l)$. Ряд по синусам даст функцию, получающуюся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний промежуток $(-l, 0)$ и затем периодическим продолжением с периодом $T = 2l$ вне промежутка $(-l, l)$.

Итак, функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(0, l)$ можно разложить бесчисленным множеством способов в зависимости от способа продолжения ее в отрицательную область. В частности, ее можно разложить в ряд косинусов (четное продолжение) или в ряд синусов (нечетное продолжение).

7. Понятие о разложении в ряд Фурье непериодических функций

Функцию, заданную в основной области $(-l, l)$, можно периодически продолжить за основную область с помощью функционального соотношения $f(x+2l)=f(x)$

Для непериодической функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ можно выделить участок $(-\ell < x < \ell)$, а затем взять периодическую функцию $\varphi(x)$ с периодом $T = 2\ell$, которая в промежутке $(-\ell, \ell)$ равна $f(x)$. Периодическую функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{2.18}$$

Формула (2.18) верна на всей оси $-\infty < x < \infty$. Можно написать подобное разложение для функции

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{2.19}$$

Формула (2.19) будет верна только на конечном промежутке $(-\ell, \ell)$, так как на этом промежутке $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадают.

Таким образом, непериодическую функцию можно разложить в ряд Фурье только на конечном промежутке.

8. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Ряд Фурье (2.4) по тригонометрической системе функций с коэффициентами (2.5) может быть представлен в комплексной форме. Для этого воспользуемся соотношениями

$$e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} = \cos\frac{n\pi x}{\ell} + i\sin\frac{n\pi x}{\ell}; \quad e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} = \cos\frac{n\pi x}{\ell} - i\sin\frac{n\pi x}{\ell} \tag{2.20}$$

и выразим тригонометрические функции по формулам

$$\cos\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} + e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}\right]; \quad \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} - e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}\right] \tag{2.21}$$

Получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{n\pi x}{\ell}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}\right)$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx,$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} - i\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}\,dx,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell} + i\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}\,dx.$$

Здесь мы воспользовались выражением (2,5) для коэффициентов Фурье и соотношениями (2,20). Отсюда окончательно получаем комплексную форму ряда Фурье в следующем виде:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \tag{2.22}$$

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx, \tag{2.23}$$

где значок k принимает не только целые положительные, но и отрицательные значения.

9. Интегральная формула Фурье

Пусть функция $f(x)$: I) Кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ на каждом промежутке $(-l, l) \subset (-\infty, +\infty)$; 2) абсолютно-интегрируема на оси $(-\infty, +\infty)$, т.е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty \tag{2.24}$$

Тогда при $-l<x<l$ эту функцию можно представить в виде ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \tag{2.25}$$

где комплексные коэффициенты Фурье определяются по формуле (2.23) (см. § 2, 8)

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-i\frac{k\pi \xi}{l}}d\xi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2.26}$$

Здесь по сравнению с формулой (2.23), для удобства дальнейших выкладок, переменная интегрирования x обозначена другой буквой ξ, что законно для определенного интеграла.

Подставляя формулу (2.26) в формулу (2.25) будем иметь

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)e^{i\frac{k\pi(x-\xi)}{l}}d\xi \qquad (-l<x<l) \tag{2.27}$$

Введем обозначения

$$\frac{k\pi}{l}=\lambda_k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$$

и $$\Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{(k+1)\pi}{l}-\frac{k\pi}{l}=\frac{\pi}{l};$$

отсюда $$\frac{1}{l}=\frac{\Delta\lambda_k}{\pi}$$

Тогда формула (2.27) примет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Delta\lambda_k\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{i\lambda_k(x-\xi)}d\xi$$
$$(-l<x<l) \qquad (2.28)$$

Пусть теперь $l\to\infty$ и, следовательно,
$$\Delta\lambda_k=\frac{\pi}{l}\to 0$$

Формула (2.28) напоминает интегральную сумму. Как известно, если функция $\varphi(x)$ -непрерывна на отрезке $[a,b]$ и

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b,$$
$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k \quad (k=0,1,2,\dots,n-1),$$

то

$$\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k)\Delta x_k=\int_a^b\varphi(x)dx \qquad (2.29)$$

Можно доказать, что при предположениях 1) и 2) для нашего ряда (2.28) на промежутке $(-\infty,\ +\infty)$ при $\Delta\lambda_k\to 0$ будет верна аналогичная формула, где функция φ имеет вид

$$\varphi_x(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi \qquad (2.30)$$

(в силу условия (2.24) интеграл (2.30) абсолютно сходится).

Таким образом, переходя к пределу $l\to\infty$ в формуле (2.28) будем иметь интегральную формулу Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi \qquad (2.31)$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

или $$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

(2.3I[I])

где
$$C(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi \tag{2.3I^{II}}$$

(≪ спектральное разложение функции $f(x)$ ≫).

Замечание. Как следует из теоремы сходимости рядов Фурье (§2,3), в точках разрыва x функции $f(x)$ левая часть формулы (2.3I) равна

$$\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right].$$

IO. Интеграл Фурье в действительном виде

Используя формулу Эйлера $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$,

формулу (2.3I) можно записать в виде
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi \tag{2.32}$$

Так как мы предполагаем, что функция $f(x)$ - действительна, то её мнимая часть равна нулю. Поэтому из формулы (2.32) получаем
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{2.33}$$

II. Интегральная формула Фурье для четных и нечетных функций

Так как
$$\cos\lambda(x-\xi)=\cos\lambda x\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\sin\lambda\xi$$

то формулу (2.33) можно переписать в виде

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{2.34}$$

где

$$a(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \tag{2.35}$$

и

$$b(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \tag{2.36}$$

Если функция $f(x)$ четная, т.е. $f(-x)=f(x)$,

то на основании леммы (§2,4) имеем

$$b(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi=0.$$

Поэтому

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \quad (-\infty<x<+\infty) \tag{2.37}$$

т.е. справедливо, так называемое «косинус разложение функции $f(x)$», где

$$a(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \tag{2.38}$$

Если же функция $f(x)$ - нечетная, т.е. $f(-x)=-f(x)$,

то аналогично получаем

$$a(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi=0$$

и

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda \tag{2.39}$$

(« синус разложение »), где

$$b(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \qquad (2.40)$$

<u>Пример</u>. Построить интегральное представление функции (рис

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<l;\\ 0, & |x|>l.\end{cases}$$

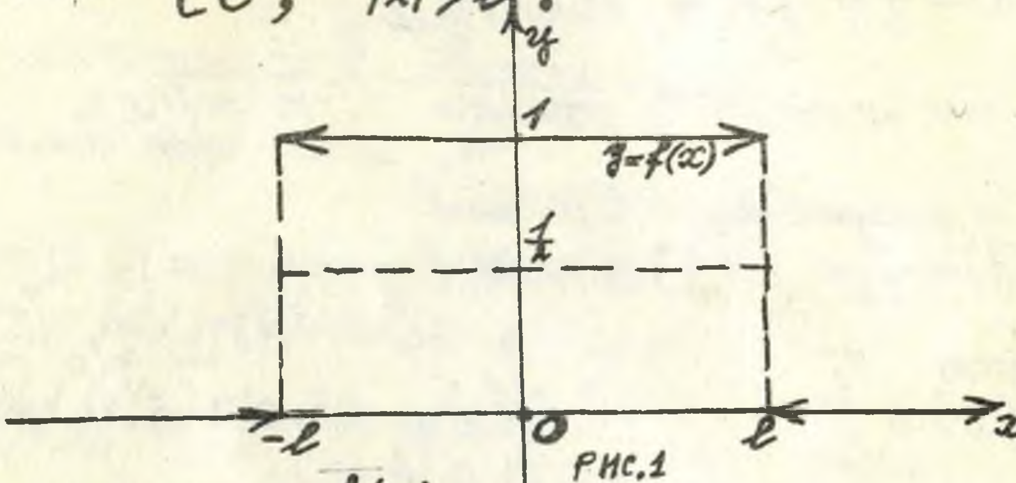


рис.1

Так как функция $f(x)$ - четная, то имеем

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \qquad (2.41)$$

где $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi=$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{l}1\cdot\cos\lambda\xi\,d\xi+\int_{l}^{+\infty}0\cdot\cos\lambda\xi\,d\xi\right\}=$$

$$=\frac{\sin\lambda\xi}{\pi\lambda}\bigg|_{\xi=0}^{\xi=l}=\frac{\sin\lambda l}{\pi\lambda}$$

На основании формулы (2.41) получаем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda \qquad (2.42)$$

$$(|x|\neq l).$$

В силу замечания (9.I) при $x=l$ имеем

$$\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda l}{\lambda}\cos\lambda l\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\lambda l}{\lambda}d\lambda$$

.1) Отсюда, полагая $l=\frac{1}{2}$, получаем замечательный интеграл Дирихле

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\pi. \tag{2.43}$$

Упражнения к главе I.

I. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\frac{x}{|x|}$

в интервале $-\pi<x<\pi$. Изобразить график функции и графики нескольких частичных сумм ряда Фурье этой функции. Пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Решение. Так как функция $f(x)$ нечетная, то её тригонометрический ряд Фурье (2.I6) содержит только синусы кратных дуг

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где коэффициенты b_n вычисляются по формулам (2.I7) и равны

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\right].$$

Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x)=\cancel{1}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\quad(x\neq 0)$$

только если $x>0$

$\left(f(x)=\mathrm{sign}\,x\right.$ $x\neq 0,$ $\left.x\in(-\pi,\pi)\right)$

Полагая $x=\frac{\pi}{2}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

Частичные суммы данного тригонометрического ряда равны:

$$S_1=\frac{4}{\pi}\sin x,$$

$$S_2=S_1+\frac{4}{3\pi}\sin 3x,\ldots$$

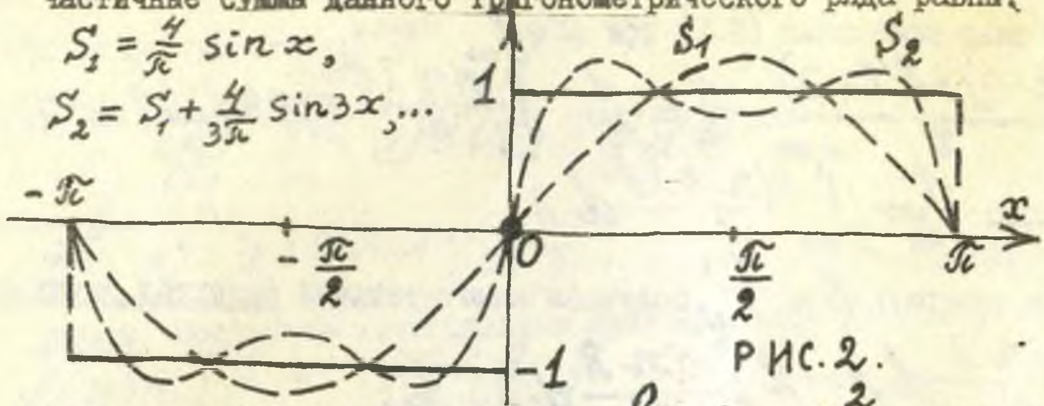


РИС.2.

2.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

Решение. Так как данная функция четная, то имеет место разложение (2.I4)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формулам (2.I5) и равны

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Следовательно,

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

3.Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=|\cos x|.$$

Решение. Данная функция четная и имеет период π $(2l=\pi)$. Следовательно, для неё имеет место разложение (2.I0)

$$|\cos x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx,$$

где коэффициенты a_n вычисляются по формулам (2.8) и равны

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2nx\,dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.$$

Следовательно,

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

4. $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

5. $f(x)=x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

6. $f(x)=\pi^2-x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

7. $$f(x)=\begin{cases} A & \text{если } -\pi<x<0, \\ B & \text{если } 0<x<\pi \\ \dfrac{A+B}{2} & \text{если } x=-\pi, 0, \pi \end{cases}$$

на сегменте $[-\pi, \pi]$, где A и B постоянные.

8. $f(x)=x\cos x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Показать справедливость следующих равенств:

9. $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}=\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}, \quad -\pi\le x\le\pi.$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\pi^2 x-x^3}{12}, \quad -\pi\le x\le\pi.$$

12. Функцию $f(x)=\sin^4 x$ разложить в ряд Фурье.

Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции:

13. $f(x)=\operatorname{sign}(\cos x)$;

14. $f(x)=\arcsin(\sin x)$

15. $f(x)=|\sin x|$.

Указанные ниже функции разложить в интервале $(0, \pi)$ в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг, б) по косинусам кратных дуг. Нарисовать графики функций и графики частичных сумм соответствующих рядов в области их существования.

16. $$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{\pi}{2}\le x<\pi. \end{cases}$$

17. $f(x)=x$.

Показать справедливость следующих равенств:

18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$, $0<x<\pi$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$

20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-2\pi x}{8}$, $0\le x\le\pi$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$, $0\le x\le 2\pi$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}$, $0\le x\le 2\pi$

Разложить в ряды Фурье в интервале ($0, \pi$) по синусам кратных дуг функции:

23. $f(x)=x(\pi-x)$

24. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

Разложить в ряды Фурье в интервале ($0, \pi$) по косинусам кратных дуг функции:

25. $$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h}, & \text{если } 0<x\le 2h\\ 0, & \text{если } 2h<x<\pi\end{cases}$$

26. $$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0<x\le h\\ 0, & \text{если } h<x<\pi\end{cases}$$

Разложить в указанных интервалах в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг и б) по косинусам кратных дуг следующие функции:

27. $f(x)=1$ в интервале $0<x<1$

28. $f(x)=x$ в интервале $0<x<l$

В указанных интервалах разложить в ряды Фурье функции:

29. $f(x)=|x|$ в интервале $-1<x<1$

30. $f(x)=10-x$ в интервале $5<x<15$.

31. Представить интегралом Фурье следующие функции:

а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{если } |x|<1, \\ 0, & \text{если } |x|>1; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } |x|<1, \\ 0, & \text{если } |x|>1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x|\le 1, \\ 0, & \text{если } |x|>1; \end{cases}$

г) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

<u>Указание</u>. Воспользоваться интегралом Лапласа

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

д) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

<u>Указание</u>. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\, e^{-|\alpha|}.$$

е) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{если } |x|\le\pi, \\ 0, & \text{если } |x|>\pi; \end{cases}$

ж) $f(x)=e^{-\alpha|x|}$; $(\alpha>0)$;

<u>Указание</u>. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2},\ (a>0);$$

з) $f(x)=e^{-x^2}$;

Указание. Воспользоваться интегралом

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}, (a>0);$$

и) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } -1<x<0, \\ 1/2, & \text{если } x=-1,0,+1, \\ x, & \text{если } 0<x<1, \\ 0, & \text{если } |x|>1. \end{cases}$

32. Функцию $f(x)=e^{-x}$, $(0<x<+\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжая её: а) четным образом ; б) нечетным образом.

Указание. Воспользоваться интегралами: $(a>0)$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Г Л А В А II

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Многие задачи физики и техники приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Уравнением в частных производных называется соотношение, которое связывает неизвестную функцию нескольких переменных $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и ее частные производные:

$$\Phi\left(x_1, x_2 \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots \right.$$
$$\left. \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \dots \right) = 0, \quad (I)$$

где: Φ - заданная функция своих аргументов.

Решением уравнения в частных производных (I) называется всякая функция, которая после подстановки вместо неизвестной функции обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

В математической физике наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения второго порядка. Основными из них являются:

уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (2)$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (3)$$

уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (4)$$

§ 3. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

I. Замена переменных в дифференциальном уравнении

Рассмотрим линейное относительно старших производных уравнение второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (3.I)$$

Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области G коэффициенты $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$ и $C=C(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль

Выражение $D=B^2-AC$ называется дискриминантом уравнения (3.I)

Уравнение (3.I) в данной области принадлежит:

а) гиперболическому типу, если $B^2-AC>0$,

б) параболическому типу, если $B^2-AC=0$,

в) эллиптическому типу, если $B^2-AC<0$.

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η) (рис.3.)

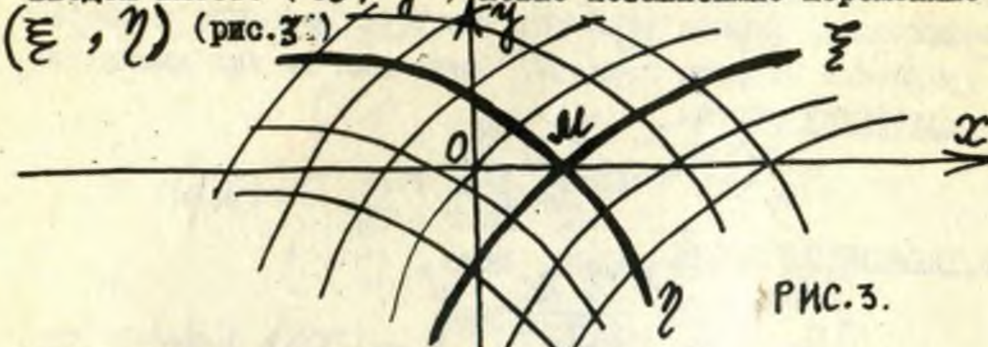


РИС.3.

Пусть преобразование переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{3.2}$$

является невырожденным, т.е. якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

в области G .

Производные в новых независимых переменных ξ и η вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

A. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

C. $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}; \tag{3.3}$$

2B. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

дставляя значения производных из (3.3) в уравнение (3.I), полу-
м:

$$\ldots_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\cdot\partial\eta}+C_1\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \qquad (3.4)$$

е:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,\\ \ldots&=A\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ \ldots_1&=A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

При преобразовании (3.2) порядок дифференциального уравнения .I) не может увеличится. Заметим, что в уравнении (3.4) коэффи-ента $A_I = A_I(\xi, \eta)$, $B_I = B_I(\xi, \eta)$ и $C_I = C_I(\xi, \eta)$ могут одновременно обращаться в нуль.

йствительно, производя обратное преобразование

$$x=\varphi_1(\xi,\eta),\quad y=\psi_1(\xi,\eta)$$

должны вернуться к исходному уравнению (3.I), где $A^2+B^2+C^2\neq 0$. это невозможно, если в некоторой точке (ξ, η) имеем $A_I^2 + B_I^2 + C_I^2 = 0$.

ким образом, уравнение (3.4) есть уравнение также второго поряд-
.

Легко непосредственно убедиться, что

$$B_1^2-A_1C_1=J^2\cdot(B^2-AC) \qquad (3.6)$$

Отсюда следует инвариантность типа уравнения при преобраз-нии переменных.

Таким образом, при невырожденной замене независимых переме-х в линейном дифференциальном уравнении не меняется:

I) порядок уравнения,

2) линейность,

3) тип уравнения.

2. Характеристики уравнения

Под характеристическим семейством кривых понимается однопа-метрическое семейство, обладающее тем свойством, что если пара-тр семейства принять за новую криволинейную координату, то в преобразованном дифференциальном уравнении будет отсутствовать член, содержащий вторую производную неизвестной функции по этой координате.

Всякая кривая, входящая в характеристическое семейство, называется характеристикой.

Например, если $\xi = \varphi(x,y)$

характеристическое семейство, то $A_1 = 0$,

то есть
$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (3.7)$$
в силу соотношения (3.5).

Пусть $\varphi(x,y) = \xi = const$ (3.8)

- некоторая фиксированная характеристика. Дифференцируем (3.8)
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$
или
$$\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dx}{-\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \mathcal{K}.$$

Отсюда
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{dy}{\mathcal{K}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{dx}{\mathcal{K}} \qquad (3.9)$$
Подставляем (3.9) в (3.7) будем иметь:
$$\frac{A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2}{\mathcal{K}^2} = 0$$
или
$$A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2 = 0 \qquad (3.10)$$
Полученное уравнение (3.10) называется дифференциальным уравнением характеристик.

При $dx \neq 0$ оно эквивалентно следующему уравнению
$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

или
$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\ ;\ \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A} \qquad (3.11)$$

Аналогично, если $\eta=\psi(x,y)$ - характеристическое семейство, то $C_1 = 0$, а характеристики удовлетворяют также уравнению (3.10)

Итак, если выбрать в качестве новых независимых переменных ξ и η характеристики, т.е. общие интегралы уравнения (3.10), то преобразованное уравнение (3.4) примет наиболее простой вид.

3. Канонический вид уравнения гиперболического типа

Для уравнения гиперболического типа в области $G \mid B^2-AC>0$ и общие интегралы $\varphi(x,y)=const$ и $\psi(x,y)=const$ уравнений (3.11) действительны и различны. Мы имеем два различных семейства действительных характеристик.

Пусть в преобразовании (3.2)
$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=\psi(x,y) \qquad (3.12)$$
Тогда в силу (3.5) в уравнении (3.4) коэффициенты
$$A_1 = C_1 = 0.$$

Якобиан J в рассматриваемой области предполагается отличным от нуля, поэтому из соотношения (3.6) следует, что
$$B_1 \neq 0$$
и уравнение (3.4) примет вид: $2B_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_1.$

Разделив на $2B_1$, получим
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (3.13)$$
Это - <u>канонический вид уравнения гиперболического типа.</u>

Полагая $\xi=\alpha+\beta,\ \eta=\alpha-\beta$,
где: $\alpha=\dfrac{\xi+\eta}{2},\ \beta=\dfrac{\xi-\eta}{2}$ - новые переменные, можно получить вторую каноническую форму уравнения гиперболического типа:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=f^*\ \ (f^*=4f_1).$$

Простейшим примером уравнения данного типа может служи[ть] уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4. Канонический вид уравнения параболического типа

Для уравнения параболического типа в некоторой области G

$$B^2 - AC = 0 \tag{3.I4}$$

Следовательно, один из коэффициентов A и C отличен от ну[ля], так как мы предполагали, что коэффициенты A, B и C уравнения (3.I) не обращаются одновременно в нуль.

Пусть, например, $A \neq 0$. Тогда уравнения (3.II) совпадают

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} \tag{3.I5}$$

Мы получаем один общий интеграл уравнения характеристик (3.I0)

$$\varphi(x,y) = const.$$

Следовательно, уравнение параболического типа имеет одно с[е]мейство действительных характеристик.

Предполагая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$ в уравнение (3.I) введем нов[ые] переменные

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = y; \tag{3.I6}$$

при этом

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$$

Тогда в силу (3.5) в уравнении (3.4) коэффициент

$$A_I = 0,$$

а

$$B_1 = A\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \tag{3.I7}$$
$$+ C\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Покажем, что коэффициент $B_1 = 0$. Для этого уравнение (3.7), которому удовлетворяют семейства характеристик,

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0 \qquad (3.18)$$

умножим и разделим на C. Используя соотношения (3.14) и (3.17), получим

$$\frac{(AC-B^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{C}=\frac{B_1^2}{C}=0$$

Откуда, $B_1 = 0$.

Следовательно, уравнение (3.1) параболического типа в новых переменных (3.16) принимает следующий вид:

$$C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_1$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (3.19)$$

Это - <u>канонический вид уравнения параболического типа</u>.

Примером уравнения параболического типа может быть уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial y}$$

Заметим, что если коэффициент $C = 0$, то из (3.14) получаем $B = 0$ и следовательно, уравнение (3.1) имеет канонический вид (3.19) и преобразование (3.16) излишне.

Можно показать, что в параболическом случае любое преобразование вида: $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$

с якобианом $J\neq 0$, приводит уравнение (3.1) к каноническому виду.

5. <u>Канонический вид уравнения эллиптического типа</u>

Для уравнения эллиптического типа $B^2 - AC < 0$ и правые части уравнений (3.11) комплексны. Пусть

$$\varphi(x,y)=const, \quad \psi(x,y)=const$$

- комплексные интегралы этих уравнений. Переходя к комплексным переменным

$$\xi=\varphi(x,y)\ ,\ \eta=\psi(x,y) \tag{3.20}$$

получим, как и в случае уравнения гиперболического типа, преобразованное уравнение (3.4) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\cdot\partial\eta}=f_1 \tag{3.2I}$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β :

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}\ ;\ \beta=\frac{\xi-\eta}{2i}\ ,$$

так что

$$\xi=\alpha+i\beta\ ,\ \eta=\alpha-i\beta$$

При этом уравнение (3.2I) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\cdot\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{2i}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\left(-\frac{1}{2i}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\left(-\frac{1}{2i}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)=f_1$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=f^*,\quad (f^*=4f_1). \tag{3.22}$$

Это-<u>канонический вид уравнения эллиптического типа</u>.

Простейшим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа.

<u>Замечание</u>. Может случиться, что уравнение (3.I) в разных частях области G принадлежит различным типам. Примером такого уравнения <u>смешанного типа</u> может служить уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

При $y>0$ оно принадлежит эллиптическому типу, при $y<0$ - гиперболическому типу; $y=0$ - линия параболичности.

§ 4. Задачи с начальными данными

I. Задача Коши

Рассмотрим общую постановку задачи с начальными данными для уравнения:

$$L[u]=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{4.1}$$

где оператор

$$L[u]=A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.2}$$

Пусть на плоскости xOy задается некоторая гладкая кривая (К); на этой кривой задается значение функции и ее производной:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ u\big|_K=\varphi(x,y)\\ &2)\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_K=\psi(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Начальные условия (4.3) называются начальными данными Коши, а кривая (К) - носительницей начальных данных.

Задача Коши ставится так: требуется найти решение уравнения (4.I), удовлетворяющее данным Коши (4.3)

Замечание I. Начальные условия (4.3) позволяют на кривой (К), задаваемой уравнением $y=\vartheta(x)$ найти значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Действительно, вдоль этой кривой

$$u(x,\vartheta(x))=\varphi(x,\vartheta(x)). \tag{4.4}$$

Дифференцируя соотношение (4.4) по x, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_K+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_K\cdot\vartheta'(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_K,$$

откуда, учитывая (4.3), будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_K=\frac{d}{dx}\varphi(x,\vartheta(x))-\psi(x,y)\vartheta'(x). \tag{4.5}$$

Замечание 2. Начальные условия Коши нельзя задавать на характеристиках (задача не будет иметь решения или будет неопределенной).

Замечание 3. Задача Коши обычно ставится для уравнений гиперболического и параболического типа. Для уравнений эллиптического типа она не рассматривается, так как может быть некорректной*). Например, задача Коши для уравнения Лапласа является некорректно поставленной. Поэтому, для уравнений эллиптического типа обычно ставятся краевые задачи.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.6)$$

с начальными данными

$$u\Big|_K = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_K = x, \qquad (4.7)$$

задаваемыми на кривой (K): $y = 2x$ (4.8)

Рассматриваемое уравнение (4.6)- гиперболического типа, так как

$$A = I, \quad B = 0, \quad C = -I$$

и $B^2 - AC = +I > 0$. Для него уравнение характеристик (6.I0) имеет вид: $(dy)^2 - (dx)^2 = 0$

или $(dy - dx)(dy + dx) = 0$. Отсюда, решая уравнения $dy - dx = 0$ и $dy + dx = 0$

получаем два семейства действительных характеристик

$y - x = C_1$ (I) и (*) $y + x = C_2$ (II)

рис. 4)

РИС. 4.

Вводим координаты: $\xi = y - x$, $\eta = y + x$

Тогда уравнение (4.6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (4.9)$$

*) см. §5.2.

и $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$. Обозначая $\frac{\partial u}{\partial \xi}=\varphi_1(\xi)$, будем иметь

$$u=\int \varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$$

и, возвращаясь к старым переменным (x, y), получим решение уравнения (4.6) в виде

$$u(x,y)=\varphi(y-x)+\psi(y+x), \qquad (4.10)$$

где φ и ψ – произвольные функции.

Обеспечим выполнение начальных условий (4.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\varphi'(y-x)+\psi'(y+x)$$

$$x^2=u\big|_{y=2x} \; ; \; x=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=2x}$$

или

$$x^2=\varphi(2x-x)+\psi(2x+x)=\varphi(x)+\psi(3x); \; x=-\varphi'(x)+\psi'(3x). \qquad (4.11)$$

Интегрируя второе из уравнений системы (4.11), получим

$$\frac{x^2}{2}+C=-\int\varphi'(x)dx+\int\psi'(3x)dx=-\varphi(x)+\frac{1}{3}\psi(3x).$$

Складывая с первым уравнением, будем иметь

$$\frac{3}{2}x^2+C=\frac{4}{3}\psi(3x)$$

Откуда $\psi(3x)=\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{4}C$

или $\psi(x)=\frac{9}{8}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{3}{4}C=\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}C$;

$$\varphi(x)=x^2-\psi(3x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}C.$$

Следовательно,

$$u=\varphi(y-x)+\psi(y+x)=-\frac{1}{8}(y-x)^2-\frac{3}{4}C+$$
$$+\frac{1}{8}(y+x)^2+\frac{3}{4}C=\frac{1}{2}xy$$

2. Задача Г у р с а

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках. Эту краевую задачу называют задачей Гурса. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки воздушным потоком, прогревания трубы потоком воды и многих других задач.

Мы рассмотрим задачу Гурса на примере простейшего уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y) \tag{4.12}$$

Для него уравнение характеристик (4.10) имеет вид

$$dx \cdot dy = 0$$

или $dx = 0$, $dy = 0$. Эти уравнения имеют соответственно решения y и x. Следовательно,

$$x = const\,, \quad y = const$$

– семейства характеристик рассматриваемого уравнения (4.12).

Пусть дополнительные условия даны на прямых $x=0$ и $y=0$, являющихся характеристиками данных семейств,

$$u(x,0) = \varphi_1(x)\,; \quad u(0,y) = \varphi_2(y) \tag{4.13}$$

Итак, требуется решить задачу Гурса: найти решение уравнения (4.12), принимающее заданные значения (4.13) на характеристиках $x=0$ и $y=0$

Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

Интегрируя уравнение (4.12) последовательно по x и по y будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,y) + \int_0^x f(\xi,y)\,d\xi\,,$$

$$u(x,y) = u(x,0) + u(0,y) - u(0,0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi$$

или, воспользовавшись данными (4.13), окончательно получим

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{4.14}$$

Формула (4.14) представляет в явной аналитической форме решение поставленной задачи Гурса для простейшего уравнения (4.12). Из нее непосредственно следует единственность и существование решения этой задачи.

Упражнения к главе II.

1. Определить тип и найти характеристики уравнения

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial y},\ (x\neq 0,\ y\neq 0).$$

<u>Решение</u>. Так как коэффициенты этого уравнения

$$A=y^2,\ B=0,\ C=-x^2,$$

то выражение $B^2-AC=x^2y^2\geqslant 0$

и, следовательно, вне осей координат данное уравнение принадлежит гиперболическому типу. Дифференциальное уравнение характеристик (3.10) имеет вид $y^2(dy)^2-x^2(dx)^2=0$

и распадается на два уравнения

$$ydy-xdx=0 \quad \text{и} \quad ydy+xdx=0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем два семейства действительных характеристик

$$y^2-x^2=C_1 \quad \text{и} \quad y^2+x^2=C_2,$$

$\xi=y^2-x^2$

$\eta=y^2+x^2$

из которых первое представляет собой семейство гипербол, а второе - семейство окружностей.

2. Привести к каноническому виду и решить уравнение

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad (y\neq 0).$$

<u>Решение</u>. Так как для всех значений $y\neq 0$ выражение

$$B^2-AC=\left(-\frac{y}{2}\right)^2>0,$$

то рассматриваемое уравнение принадлежит гиперболическому типу. Дифференциальное уравнение характеристик (3.10) имеет вид

$$x(dy)^2+y(dxdy)=0$$

и распадается на два уравнения

$$dy=0 \quad \text{и} \quad xdy+ydx=0.$$

Следовательно, мы получаем два различных семейства действитель-ных характеристик:

$$y=C_1 \quad \text{и} \quad xy=C_2.$$

Введем вместо (x, y) новые переменные (ξ , η),полагая

$$\xi=y, \quad \eta=xy.$$

Данное преобразование переменных является невырожденным,так как якобиан

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y \\ 1 & x \end{vmatrix} = -y \neq 0$$

в рассматриваемой области.

Вычисляя производные в новых независимых переменных ξ и η по формулам (3.3) перепишем исходное уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Решим это уравнение, для чего введем функцию $p=\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{2}{\xi}p=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(\ln p)=-\frac{2}{\xi}.$$

Отсюда $\ln p=-2\ln \xi+\ln \varphi(\eta),$

где $\varphi(\eta)$ - произвольная функция переменной η . Потенцируя, получим

$$p=\frac{\varphi(\eta)}{\xi^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\varphi(\eta)}{\xi^2}$$

Интегрируя последнее равенство, находим

$$u=\frac{1}{\xi^2}\int \varphi(\eta)\,d\eta+F_2(\xi)=\frac{F_1(\eta)}{\xi^2}+F_2(\xi),$$

где F_1 и F_2 - две произвольные функции. Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем окончательный ответ:

$$u(x,y)=\frac{F_1(x,y)}{y^2}+F_2(y).$$

3. Привести к каноническому виду уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0, (y \neq 0).$$

Решение. Это уравнение - параболического типа, так как выражение

$$B^2 - AC = 0$$

Дифференциальное уравнение характеристик

$$\operatorname{tg} x\, dy + y\, dx = 0$$

имеет один общий интеграл $y \sin x = C.$

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные

$$\xi = y \sin x\ , \ \eta = y.$$

Так как в рассматриваемой области $y \neq 0$ якобиан

$$J = y \cos x \neq 0,$$

то данное преобразование переменных является невырожденным.

Используя формулы (3.3) перепишем исходное уравнение в виде

$$\eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} .$$

Это - канонический вид рассматриваемого уравнения параболического типа.

4. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. Так как коэффициенты уравнения

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 5,$$

то

$$B^2 - AC = -1 < 0$$

и, следовательно, рассматриваемое уравнение принадлежит эллиптическому типу. Решая дифференциальное уравнение характеристик

$$(dy)^2 - 4dx\,dy + 5(dx)^2 = 0,$$

получаем два комплексно-сопряженных общих интеграла

$$(y-2x) \pm ix = C_{1,2}.$$

Вводя новые независимые переменные

$$\xi = y - 2x\ , \quad \eta = x$$

и вычисляя производные по формулам (3.3), исходное уравнение приводим к следующему каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

5. Найти общее решение следующих простейших уравнений:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy$; в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{x}{y}$;

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a\dfrac{\partial u}{\partial y}$; д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$; е) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

ж) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

6. Решить уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

где A,B,C - постоянные и $B^2 - AC > 0$, вводя новые переменные

$$\xi = x + \lambda_1 y\ , \quad \eta = x + \lambda_2 y.$$

7. Решить уравнение

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

вводя новые независимые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = x^2 + y^2.$$

8. Решить уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - u = 0,$$

положив

$$\xi = x\ , \quad \eta = \frac{y}{x}$$

и приняв ξ и η за новые независимые переменные.

8* $y\frac{\partial u}{\partial x} + (x-1)\frac{\partial u}{\partial y} = $ [illegible]

положив $\xi = x, \ \eta = y^2 - x^2 + 2x$

9. Определить тип и найти характеристики уравнений: N1

а) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = 0$;

в) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9x\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = 0$;

г) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Привести к конoническому виду следующие уравнения;

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

11. Привести к каноническому виду и решить следующие уравнения:

В1 а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; N5

В2 б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; гип. типа

к.л. в) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

12. Решить уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \ (y>0)$;

В3 б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

В4 в) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

В5 г) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

I3. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнений:

а) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$ б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$(\alpha - const);$

и привести их к каноническому виду в областях эллиптичности и гиперболичности.

I4. Переходя к полярным координатам r и φ ,полагая

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi,$$

решить уравнения:

а) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;$

6.6 б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$

67 в) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$

~~67~~ ! I5. Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2y,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{y=x^2}=1.$$

I6. Решить задачи Коши:

а) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\\ u\big|_{y=0}=1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=x;\end{cases}$ 6.8 б) $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\\ u\big|_{y=0}=A\sin x,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=Bx;\end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3, \\ u\big|_{y=x} = x^2(x^3+2), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=x} = 3x(x^3+1); \end{cases}$$

6 10

г) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ u\big|_{x=0} = A, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = B. \end{cases}$$

Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0.$$

. Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi(x).$$

. Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=\sin x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\sin x} = \psi(x).$$

. Найти решение $u(x,y)$ уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$?

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{y=1} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = \psi(x).$$

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§5. Уравнение колебаний струны

I. Вывод уравнения колебаний струны. Понятие о граничных и начальных условиях

Рассмотрим натянутую струну, т.е. тонкую гибкую упругую н... которая расположена в некоторой плоскости Oxu и в результате известного возмущения была выведена из положения равновесия O...

Мы ограничимся изучением поперечных колебаний струны, т.е. будем предполагать, что при колебании струны точки ее движутся перпендикулярно оси Ox. Обозначим через

$$u = u(x, t)$$

- смещение точки струны с абсциссой x в момент времени t относительно оси Ox (рис. 5).

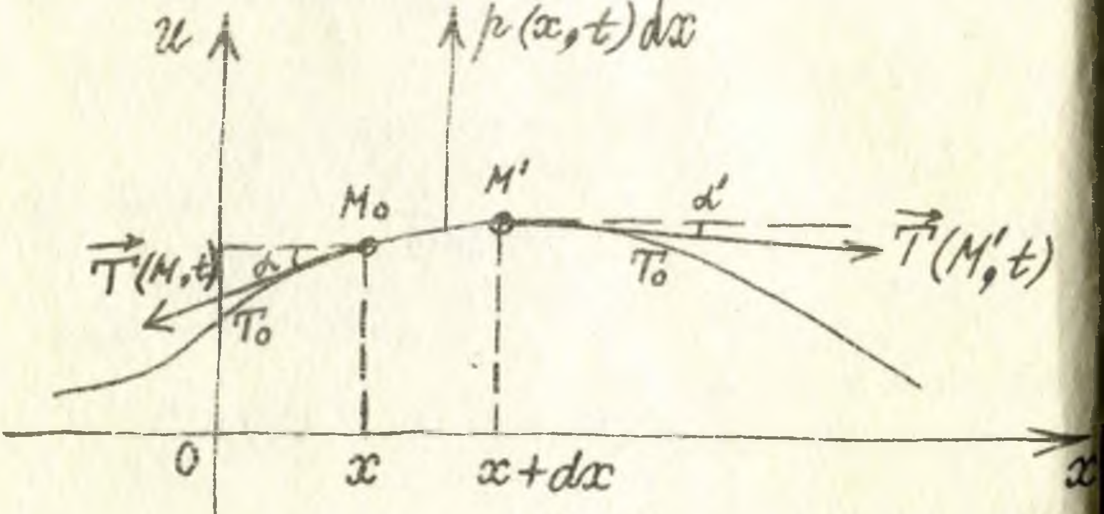


Рис. 5.

Функция $u(x,t)$ при $0 \le t < +\infty$, описывает процесс колебаний струны; при фиксированном времени $t = t_1$; $u = u(...$ представляет собой мгновенный профиль струны.

Сделаем следующие допущения:

I/ Будем предполагать, что струна совершает малые колебания, . ее форма в процессе колебаний незначительно отличается от мой $u=0$. Будем предполагать, что наклон касательной рафику функции $u=u(x,t)$, $t=const$, т.е. $tg\,\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$, ь малая по модулю величина по сравнению с единицей. Отсюда учаем, что $\sin\alpha \approx tg\,\alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$.

2/ В каждой точке струны x приложена направленная по ка-ельной упругая сила натяжения $\vec{T}(x,t)$, величина кото- $T_0=|\vec{T}(x,t)|$ является практически постоянной, т.е. не за-ит от x и t.

3/ На струну действуют непрерывно распределенные внешние си-, перпендикулярные оси Ох, с плотностью (нагрузкой) $p(x,t)$, [в случ. [illegible] $p=0$ [illegible]] считанной на единицу длины.

Вырежем из струны бесконечно малый элемент $\overset{\frown}{MM'}$, абсциссами торого являются x и $x+dx$. Воздействие отброшенных ле-й и правой частей струны заменим соответствующими силами натя-ния. Тогда элемент $\overset{\frown}{MM'}$ можно рассматривать, как свободную мате-альную точку, находящуюся под действием упругих сил $\vec{T}(M,t)$, (M',t) и внешней силы $p(x,t)dx\cdot\vec{e}_u$, е $\vec{e}_u$ – орт оси Ou.

Пусть $\rho(x)$ – линейная плотность струны в точке x. Так к в положении равновесия масса элемента равна $\rho(x)dx$, то в лу сохранения массы элемент $\overset{\frown}{MM'}$ имеет ту же массу.

Обозначим через α и α' углы, образованные с осью ox каса-льными к профилю струны в момент времени t, соответственно, в чках М и М^I. Проектируя на ось ou силы, приложенные к элеме-у $\overset{\frown}{MM}{}^I$, в силу закона Ньютона, будем иметь

$$\rho(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\sin\alpha'- -T_0\sin\alpha+p(x,t)dx \qquad (5.I)$$

Согласно предположению I) углы α и α' – малы; поэтому

$$\sin\alpha \approx tg\,\alpha=\frac{\partial}{\partial x} \qquad (5.2)$$

и $$\sin\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} \qquad (5.2')$$

Для подсчета (5.2$'$) используем известную формулу математическо-го анализа.

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx,$$

справедливую с точностью до бесконечно малых высших порядков. Отсюда имеем:

$$\sin\alpha' \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \qquad (5.3)$$

Подставляя выражение (5.2) и (5.3) в формулу (5.I) получим

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \qquad (5.4)$$

Мы получили искомое уравнение вынужденных поперечных колебаний струны.

В случае постоянной плотности $\rho = const$ это уравнение обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t), \qquad (5.5)$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $P = \frac{p(x,t)}{\rho}$ есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

При отсутствии внешней силы $P(x,t)=0$ мы получаем уравнение свободных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5.6)$$

Уравнение (5.4),как показало выше, имеет бесчисленное множество решений. Поэтому для однозначной характеристики процесса колебаний необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия,вытекающие из физического смысла данной задачи. Эти условия могут быть весьма разнообразными. В простейшем случае,как и в динамике точки, задается положение и скорость точек струны в начальный момент времени:

$$u(x,0) = \varphi(x)\,;\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \qquad (5.7)$$

Эти условия, которым должно удовлетворять решение $u(x,t)$ при $t=0$, называются начальными условиями.

Далее, если струна ограничена, то необходимо задать условия на ее концах. В частности, для струны, концы которой $x=0$ и $x=\ell$ закреплены,

$$u(0,t)=0\ ;\ u(\ell,t)=0 \qquad (5.8)$$

при всяком $t\geqslant 0$. Условия (5.8) называются граничными условиями. Возможны и другие типы граничных условий.

Таким образом, физическая задача о колебаниях струны, закрепленной на концах, свелась к следующей математической задаче: найти решение $u(x,t)$ уравнения (5.4), удовлетворяющее начальным условиям (5.7) и граничным условиям (5.8). Это так называемая смешанная краевая задача для уравнения колебаний. К ней также можно прийти при изучении одномерных колебаний идеального газа или одномерных продольных колебаний стержня.

2. Замечание о "корректно поставленных" задачах

Математическое описание физического процесса начинается с постановки задачи, т.е. с вывода уравнения и формулирования условий, достаточных для однозначного определения этого процесса. Эти дополнительные условия, называемые данными задачи, должны обеспечить ей физическую определенность. Чаще всего данными задачи являются начальные условия, т.е. условия в некоторый момент времени, с которого начинается изучение физического процесса и граничные условия, т.е. условия на границе области, в которой ищется решение. В поставленной выше задаче о колебаниях струны это условия (5,7) и (5.8).

Математическая задача, соответствующая физическому явлению, должна удовлетворять следующим трем требованиям: I) решение должно существовать; 2) решение должно быть единственным; 3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (требование устойчивости), т.е. малым изменениям любого из данных задачи должны соответствовать малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется корректно поставленной задачей.

Первое и второе требования означают, что среди данных задачи нет противоречащих друг другу и их достаточно для выделения единственного решения.

Третье требование необходимо, чтобы математическая задача правильно описывала наблюдаемые физические явления. В действительности данные задачи нельзя считать строго фиксированными, т. к. они (особенно экспериментально полученные) всегда заданы в некоторых пределах точности. Поэтому необходимо, чтобы малая погрешность в данных приводила к малой неточности в решении. Это требование "устойчивости" имеет существенное значение также для приближенных методов.

Мы будем рассматривать только классические корректно поставленные задачи. Однако, следует заметить, что это далеко не единственные задачи, правильно отражающие физические явления. Имеются примеры задач, которые "некорректно поставлены". Их исследованию, особенно в приближенных вычислениях, в последнее время уделяется большое внимание.

3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера

Корректность задачи. Физическая интерпретация

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны: найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ; \quad -\infty < x < \infty \tag{5.9}$$

с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \text{при } -\infty < x < \infty, \tag{5.10}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - достаточно гладкие заданные функции.

Эту задачу называют <u>задачей Коши</u>.

Приведем уравнение колебаний струны (5.9) к виду, допускающему непосредственное интегрирование. Возьмем в качестве новых независимых переменных характеристики уравнения (5.9)

$$\xi = x + at\ , \quad \eta = x - at .$$

Вычислим производные
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Уравнение в новых переменных запишется в виде
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$
или
$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

Откуда $$\frac{\partial u}{\partial \eta}=f(\eta),$$

где $f(\eta)$ - произвольная функция только переменного η. Интегрируя полученное уравнение по η при фиксированном ξ, получим:
$$u=\int f(\eta)\,d\eta+F_1(\xi)=F_1(\xi)+F_2(\eta),$$
где $F_1(\xi)$ и $F_2(\eta)$ являются функциями только переменных ξ и η. Возвращаясь к старым переменным, будем иметь
$$u(x,t)=F_1(x+at)+F_2(x-at). \tag{5.II}$$

Непосредствееной подстановкой в уравнение убеждаемся, что полученная функция $u(x,t)$ является решением общего вида уравнения (5.9), если F_1 и F_2 - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Выберем функции F_1 и F_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям (5.I0):
$$u(x,0)=F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=aF_1'(x)-aF_2'(x)=\psi(x).$$

Отсюда интегрируя второе равенство, получим:
$$F_1(x)+F_2(x)=\varphi(x)$$
$$F_1(x)-F_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)\,dz+C,$$

где x_0 и C - произвольные постоянные. Из равенства (5.I2) находим

$$F_1=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)\,dz+\frac{C}{2},$$

$$F_2=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)\,dz-\frac{C}{2}. \qquad (5.I3)$$

Эти формулы определяют функции F_1 и F_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (5.I3) справедливы при любом значении аргумента. Подставляя в (5.II) найденные значения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, будем иметь

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left\{\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(z)\,dz-\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(z)\,dz\right\}$$

или окончательно

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz \qquad (5.I4)$$

Формула (5.I4) дает решение задачи Коши (5.9) (5.I0) и называется <u>формулой Даламбера</u>.

Задача Коши (5.9) и (5.I0) поставлена корректно.

Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что формула (5.I4) удовлетворяет (в предположении, что $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ - до первого) уравнению и начальным условиям.

Далее, эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало другое решение задачи (5.9) и (5.I0), то оно давалось бы формулой Даламбера (5.I4) и совпадало бы с первым.

Таким образом, решение существует и единственно.

Докажем, наконец, что решение непрерывно зависит от начальных данных, т.е. для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что если заменить начальные значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $\overline{\varphi(x)}$ и $\overline{\psi(x)}$, отличающиеся друг от друга меньше, чем на δ:

$$|\varphi(x)-\overline{\varphi(x)}|<\delta,\quad |\psi(x)-\overline{\psi(x)}|<\delta,\quad (-\infty<x<\infty)$$

то новое решение $\overline{u(x,t)}$ и первоначальное $u(x,t)$ будут различаться между собой меньше, чем на ε:

$$|u(x,t)-\overline{u(x,t)}|<\varepsilon$$

на любом конечном промежутке времени $0\le t\le T$.

Доказательство этого утверждения сразу следует из формулы Даламбера (5.I4), которая связывает функции $u(x,t)$ и $\overline{u(x,t)}$ со своими начальными значениями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\psi}(x)$. Действительно,

$$|u(x,t)-\overline{u(x,t)}| \le \frac{|\varphi(x+at)-\overline{\varphi}(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi(x-at)-\overline{\varphi}(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi(z)-\overline{\psi}(z)|\,dz,$$

Откуда в силу неравенств (5.I5) получаем:

$$|u(x,t)-\overline{u(x,t)}| \le \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\delta\cdot 2at \le \delta(1+T),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+T}.$$

Дадим физическую интерпретацию полученного решения (5.I4) задачи Коши для неограниченной струны. Как мы видели, оно может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$u(x,t)=F_1(x+at)+F_2(x-at) \tag{5.II}$$

В каждый фиксированный момент времени t график функции $F_1(x+at)$ получается из графика $F_1(x)$ смещением влево на величину at, а график $F_2(x-at)$ - смещением графика $F_2(x)$ вправо на ту же величину. Если построены графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то для построения профиля струны в любой момент времени t достаточно сдвинуть кривую $F_1(x)$ влево на величину at, кривую $F_2(x)$ - вправо на ту же величину и затем для каждого x сложить графически ординаты полученных кривых. Полученная в результате сложения кривая даст форму (профиль) струны в момент времени t.

Функция $F_1(x+at)$ описывает волну, распространяющуюся влево со скоростью a, а функция $F_2(x-at)$ - волну, распространяющуюся вправо с той же скоростью a. Таким образом, профиль струны $u(x,t)$ есть суперпозиция двух волн.

Рассмотрим случай, когда начальные скорости точек струны равны нулю, т.е. $\psi(x) = 0$. Согласно формуле Даламбера (5.I4) профиль струны определяется в этом случае графиком функции

$$u(x,t)=F_1(x+at)+F_2(x-at)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{\varphi(x-at)}{2}.$$

Как уже отмечалось, он представляет сумму двух волн, распространяющихся налево и направо со скоростью a. Начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{\varphi(x)}{2}$, равной половине заданного начального отклонения. При перемещении форма этих волн остается неизменной.

Замечание. Функция $u(x,t)$, определенная формулой (5.I4) может быть решением уравнения (5.9) только при условии дифференцируемости функций φ и ψ. Такое дважды непрерывно дифференцируемое решение называется классическим решением. Однако встречаются случаи, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Например, если струна в начальный момент имеет форму ломаной линии, то $\varphi(x)$ не имеет определенной производной в вершине ломаной. В этих случаях считают, что формула Даламбера также дает решение задачи, хотя при этом функция $u(x,t)$ не всюду ~~дважды~~ дифференцируема. Такое решение называется обобщенным решением задачи. Определяемое формулой (5.I4), оно является пределом решений уравнения колебаний с немного сглаженными начальными условиями.

4. Колебания полуограниченной струны

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях полуограниченной струны $x \geqslant 0$ с жестко закрепленным концом. Она может быть сформулирована следующим образом: найти решение $u(x,t)$ уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\infty,\quad t>0, \tag{5.I5}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t)=0 \tag{5.I6}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=\psi(x)\end{aligned}\right\}. \tag{5.I7}$$

при этом $\varphi(0)=\psi(0)=0$, иначе граничные и начальные условия противоречат друг другу.

Решим вспомогательную задачу для неограниченной струны, причем на отрицательную часть продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом, т.е.

$$\varphi(-x)=-\varphi(x), \quad \psi(-x)=-\psi(x).$$

Следовательно, начальными данными вспомогательной задачи являются нечетные функции $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}$

и

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases} \tag{5.18}$$

а ее решение согласно формуле Даламбера (5.14) дается функцией

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz \tag{5.19}$$

определенной для всех x и $t>0$.

Покажем, что полученная функция $u(x,t)$ при $t>0$, $x>0$ удовлетворяет также дополнительным условиям (5.16) и (5.17) т.е. является решением поставленной исходной задачи. Действительно, функция $u(x,t)$, определяемая формулой (5.19), при $x=0$ равна

$$u(0,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(at)+\Phi(-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\Psi(z)\,dz=0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\Phi(x)$, а второе - равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю (см.Лемму § 2). Кроме того, при $t=0$ эта функция удовлетворяет необходимым начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\Phi(x)=\varphi(x),\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=\Psi(x)=\psi(x) \end{aligned}\right\}\ x>0.$$

Итак, решение задачи о распространении волн на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0,t)=0$ сводится к задаче о колебании неограниченной струны, если начальные данные продолжить на всю прямую нечетно.

5. Основная лемма метода Фурье

Если в прямоугольнике R плоскости xOy (рис. 6):

$$\left.\begin{array}{l} a<x<b \\ A<y<B \end{array}\right\} \quad (R)$$

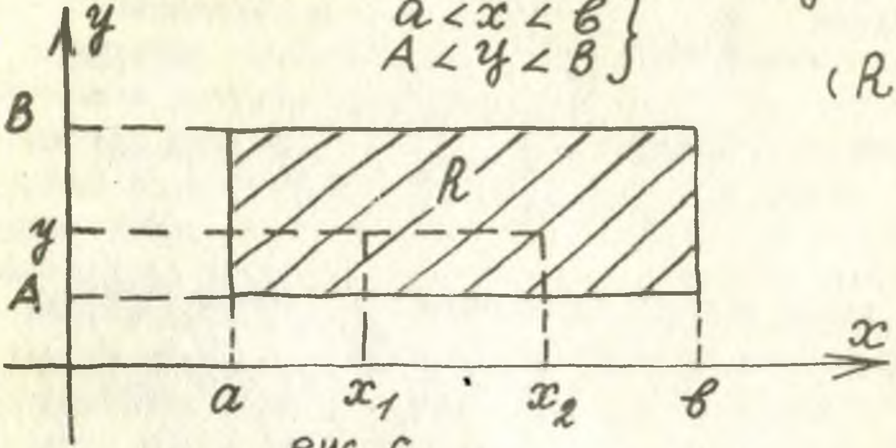


РИС. 6

для некоторых функций выполняется тождество

$$X(x)\equiv Y(y), \tag{5.20}$$

то в этом случае

$$X(x)=Y(y)=const.$$

<u>Доказательство</u>. Предположим противное, т.е. что

$$X(x)\neq const;$$

тогда существуют значения x_1 и x_2 в интервале (a,b) такие, что

$$X(x_1)\neq X(x_2).$$

Рассмотрим точки (x_1,y) и (x_2,y), принадлежащие прямоугольнику R. Для R справедливо тождество (5. 20):

$$X(x_1)=Y(y),$$
$$X(x_2)=Y(y).$$

Сравнивая эти равенства, приходим к противоречию с нашим предположением. Следовательно,

$$X(x)=const,$$

а тогда и

$$Y(y)=const.$$

6. Метод Фурье для уравнения колебаний ограниченной струны. Понятие о стоячих волнах

Метод Фурье (метод разделения переменных) является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложим этот метод на примере задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах (в точках $x = 0$ и $x = \ell$). Как известно (§5,п.I), эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.21}$$

с граничными условиями

$$u(0,t)=0, \quad u(\ell,t)=0 \tag{5.22}$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \quad (0<x<\ell), \tag{5.23}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

Метод построения решения данной задачи заключается в том, что сначала находятся функции[x] $u_n(x,t)$ ($n = 1,2,\ldots$), удовлетворяющие уравнению (5.21) и граничным условиям (5.22). Затем из этих частных решений составляется линейная комбинация

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t),$$

которая при любых значениях коэффициентов C_n в силу линейности и однородности уравнения и однородности граничных условий так же удовлетворяет уравнению и граничным условиям (принцип суперпозиции). Наконец, коэффициенты C_n составленного ряда выбираются такими, чтобы выполнялись начальные условия (5.23). Тем самым, построенная таким образом функция $u(x,t)$ будет удовлетворять всем условиям исходной задачи, т.е. будет являться ее решением.

x) Линейно независимые.

Ищем частные уравнения (5.2I), не равные тождественно нулю и удовлетворяющие граничным условиям (5.22), в виде произведения

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t), \qquad (5.24)$$

где $X(x)$ - функция только переменного x, $T(t)$ - функция только переменного t.

Подставляя (5.24) в уравнение (5.2I), получим

$$X(x)T''(t)\equiv a^2X''(x)T(t)$$

или разделив переменные: $\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}\equiv\dfrac{X''(x)}{X(x)}$

Левая часть тождества зависит только от t, а правая - только от x и на основании основной леммы Фурье представляет собой одну и ту же постоянную. Для удобства выкладок обозначим эту постоянную через $-\lambda^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}\equiv\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2=const; \qquad (*)$$

откуда получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \qquad (5.25)$$

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0. \qquad (5.26)$$

Граничные условия (5.22) дают:

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0, \quad u(l,t)=X(l)\cdot T(t)=0$$

Так как ищутся нетривиальные решения, то $T(t)\neq 0$.

Поэтому функция $X(x)$ должна удовлетворять следующим дополнительным условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \qquad (5.27)$$

Следовательно, для получения не равного нулю решения вида (5.24), удовлетворяющего граничным условиям (5.22), мы приходим к следующей задаче (о собственных значениях): найти такие значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (5.25), удовлетворяющие граничным условиям (5.27).

Эти значения λ называются собственными значениями (а их совокупность - спектром), а соответствующие решения X собственными функциями краевой задачи (5.25)и (5.27). Найдем эти собственные значения и собственные функции.

Общее решение уравнения (5.25) имеет вид

$$X(x) = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x,$$

где C_I и C_2 - произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (5.27), получим

$$C_I \cdot 0 + C_2 \cdot I = 0,$$

$$C_I \cdot \sin\lambda l + C_2 \cos\lambda l = 0$$

Из первого уравнения следует $C_2 = 0$, а из второго

$$C_1 \sin\lambda l = 0.$$

Мы должны считать $C_I \neq 0$, т.к. ищутся нетривиальные решения. Поэтому для определения λ получаем следующее спектральное уравнение:

$$\sin\lambda l = 0,$$

т.е. $$\lambda = \frac{n\pi}{l} \quad x)$$

где n - целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (5.25) и (5.27) возможны лишь при значениях

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = I,2,3,\ldots) \qquad (5.28)$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n = I,2,\ldots),(5.29)$$

определяемые с точностью до постоянного множителя, который без нарушения общности, можно считать равным единице.

Значения λ_n, соответствующие $n = 0,-I,-2,\ldots$ не принимаем во внимание, так как они отвечают или нулевому решению

$$X_0(x) = 0$$

или линейно зависимому решению $X_{-n}(x) = -X_n(x)$.

---

x) Если в уравнении (ж) обозначить постоянную через $+\lambda^2$ вместо $-\lambda^2$, то для собственных значений получим мнимые величины. Это не отразится на конечном результате.

Общее решение уравнения (5.26) при $\lambda = \lambda_n$ имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l},$$

где A_n и B_n - коэффициенты, подлежащие определению.

Таким образом, функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

являются частными решениями уравнения (5.2I), удовлетворяющими граничным условиям (5.22) при любых A_n и B_n.

В силу принципа суперпозиции решений линейного однородного уравнения ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (5.30)$$

также будет решением, если он равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Сумма этого ряда $u(x,t)$ удовлетворяет также и однородным граничным условиям (5.22), так как каждое слагаемое (5.30) удовлетворяет этим условиям.

Определим коэффициенты A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (5.23). Продифференцируем ряд (5.30) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n \sin\frac{n\pi a t}{l} + B_n \cos\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (5.3I)$$

Полагая в (5.30) и (5.3I) $t = 0$, в силу начальных условий (5.23) получим:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (5.32)$$

Эти ряды представляют собою разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Коэффициенты разложений (5.32) вычисляются по известным формулам (2.I2) и имеют вид

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx; \qquad (5.33)$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (5.30), получим ряд, формально удовлетворяющий всем требованиям решаемой задачи.

Мы не останавливаемся на выяснении условий, при которых этот ряд сходится и представляет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных задачи.

Дадим физическую интерпретацию полученного решения (5.30)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t). \tag{5.34}$$

Слагаемые $u_n(x,t)=\varphi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$,

$$\tag{5.35}$$

где $\varphi_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a t}{l}+B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}$,

называются стоячими волнами. Таким образом, форма струны в любой момент времени есть результат сложения бесконечного числа стоячих волн (гармоник). Из формулы (5.35) видно, что стоячая волна представляет собой "пульсирующую" синусоиду.

Точки $x_k=\frac{k}{n}l$, $(k=1,2,\ldots,n-1)$,

в которых $\sin\frac{n\pi x}{l}=0$,

в любой момент времени остаются неподвижными, называются узлами стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки

$$x_m=\frac{2m-1}{2n}l \qquad (m=1,2,\ldots;\quad),$$

в которых $\sin\frac{n\pi x}{l}=\pm 1$,

совершают колебания с максимальной амплитудой и называются пучностями стоячей волны. Период колебания

$$\tau_n=\frac{2\pi}{\frac{n\pi a}{l}}=\frac{2l}{na} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

Для поперечных колебаний струны $a^2=\frac{T_0}{\rho}$ и, следовательно,

$$\tau_n=\frac{2l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}.$$

Полученная формула объясняет законы колебания струны, открытые впервые экспериментально.

§ 6. Уравнение теплопроводности

I. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка задачи о распределении температуры в ограниченном стержне

Если температура тела неравномерна, то происходит процесс передачи тепла от участков более нагретых к участкам менее нагретым.

Рассмотрим однородный стержень длины l, направленный по оси x. Стержень теплоизолирован с боков и достаточно тонкий, чтобы считать температуру в каждом сечении его постоянной. Тогда процесс распространения тепла в стержне может быть описан функцией $u(x,t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t. Для определенности предположим, что температура растет с увеличением x. Напомним некоторые закономерности, известные из физики.

Рассмотрим бесконечно малую площадку $d\sigma$, через которую проходит тепловой поток. Построим вектор нормали $\vec{n}$, направленный в сторону увеличения температуры. Тогда закон теплопроводности (закон Фурье) можно сформулировать следующим образом: количество тепла dQ_1, проходящее через бесконечно малую площадку $d\sigma$ за единицу времени пропорционально ее площади и величине градиента температуры

$$dQ_1 = -k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma,$$

где k - коэффициент теплопроводности.

Согласно закону Фурье, количество тепла, проходящего через сечение x за промежуток времени $(t, t+dt)$ равно

$$dQ = -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt, \tag{6.I}$$

где S - площадь поперечного сечения стержня. Для неоднородного стержня k зависит от x.

Рассмотрим бесконечно малый элемент стержня $[x, x+dx]$

Количество тепла, которое необходимо сообщить элементу $[x, x+dx]$ за время dt, чтобы повысить его температуру на

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

равно

$$dQ = c\rho S dx \Delta u = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} S dx\, dt, \qquad (6.2)$$

где С - удельная теплоемкость, ρ - плотность, $\frac{\partial u}{\partial t}$ - скорость изменения температуры.

Будем предполагать, что в некоторых частях стержня находятся тепловые источники. Пусть $g(x,t)$ - количество тепла, создаваемое тепловым источником, помещенным в точке x в момент времени t за единицу времени, отнесенное к единице массы стержня (интенсивность теплового источника). Тогда количество тепла, выделяемое на отрезке стержня $[x, x+dx]$ за промежуток времени $[t, t+dt]$ будет

$$dQ = g(x,t)\rho S dx\, dt. \qquad (6.3)$$

Выделение или поглощение тепла может происходить, например, вследствие химических реакций, в результате прохождения электрического тока и т.д.

Выведем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x,t)$. Для этого составим уравнение теплового баланса для бесконечно малого элемента стержня $[x, x+dx]$ за промежуток времени dt. Воспользовавшись приближенной формулой

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx, \qquad (6.4)$$

а также соотношениями (6.I) и (6.3), получим для количества тепла, накопленного элементом стержня за время dt, следующее выражение:

$$dQ = -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)dt + \qquad (6.5)$$
$$+ g(x,t)\rho S dx\, dt = \left[k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g(x,t)\right] dx\, dt$$

Та же величина dQ получается на основании изменения температуры элемента стержня на величину $\frac{\partial u}{\partial t}dt$ и определяется формулой (6.2). Приравнивая оба выражения, получим:

$$\left[k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho g(x,t)\right]S\,dx\,dt=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}S\,dx\,dt.$$

Отсюда, введя обозначения

$$\frac{k}{c\rho}=a^2\,,\quad f(x,t)=\frac{1}{c}\,g(x,t),$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \tag{6.6}$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности.

Очевидно, если тепловые источники отсутствуют, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия.

Начальные условия в отличие от уравнения колебаний состоят лишь в задании значений функции $u(x,t)$ в начальный момент времени $t=0$:

$$u(x,0)=\varphi(x). \tag{6.8}$$

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границе. Например, если на концах стержня поддерживается постоянная температура: в точке $x=0$ – температура А, в точке $x=l$ – температура В, то граничные условия имеют вид:

$$u(0,t)=A\,,\quad u(l,t)=B. \tag{6.9}$$

Таким образом, задача о распределении температуры в однородном ограниченном стержне с постоянной температурой на его концах ставится так:

найти решение уравнения теплопроводности (6.6), удовлетворяющее начальному условию (6.8) и граничным условиям (6.9).

2. Вывод уравнения диффузии

Рассмотрим трубку, заполненную веществом, концентрация которого в каждом поперечном сечении одинакова и меняется от сечения к сечению. Тогда, как известно, имеется диффузия вещества из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Математически такой процесс диффузии может быть описан функцией $C(x,t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t. Получим уравнение, которому удовлетворяет эта функция. Составим уравнение баланса массы вещества на отрезке $[x, x+dx]$ за промежуток времени dt. Пусть $C(x,t)$ увеличивается с ростом x.

Согласно закону Нернста, количество вещества, проходящее в единицу времени через данное поперечное сечение пропорционально его площади S и градиенту концентрации, т.е. за время dt оно равно

$$dQ = -\mathcal{D} S \frac{\partial C}{\partial x} dt, \tag{6.10}$$

где $\mathcal{D}$ – коэффициент диффузии.

Используя формулы (6.4) и (6.10), получим, что количество вещества dQ, накопленное выделенным отрезком $[x, x+dx]$ за время dt, равно

$$dQ = -\mathcal{D} S \frac{\partial C}{\partial x} dt + \mathcal{D} S \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx\right) dt = \mathcal{D} S \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx\, dt \tag{6.11}$$

С другой стороны, изменение концентрации за время dt

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t} dt,$$

и, следовательно,

$$dQ = S\, dx\, \Delta C = S \frac{\partial C}{\partial t} dx\, dt. \tag{6.12}$$

Приравнивая выражения (6.11) и (6.12), получим:

$$\mathcal{D} S \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx\, dt = S \frac{\partial C}{\partial t} dx\, dt$$

или

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{6.13}$$

где: $a^2=?$. Это и есть искомое уравнение диффузии. Оно совершенно аналогично уравнению теплопроводности (6.7).

При выводе этого уравнения мы предполагали, что диффузия через стенки трубки отсутствует и внутри трубки нет источников вещества. При наличии источников получается неоднородное уравнение, аналогичное уравнению (6.6). Поскольку уравнения (6.I3) и (6.7) одинаковы, то краевые задачи для них ставятся также одинаково.

3. Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Температурные волны

Пусть на отрезке $[0,\ell]$ оси Ox расположен тонкий однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована от окружающей среды. На концах этого стержня поддерживается постоянная температура: на левом конце - температура A, на правом - температура B. Начальное распределение температуры в стержне задается функцией $\varphi(x)$. Найдем температуру в точке x в момент времени $t>0$, предполагая, что внутри стержня отсутствуют источники и поглотители тепла.

Эта задача, как известно (см. § 6,п.I), заключается в решении дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.I4a}$$

при начальном условии

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{6.I5a}$$

и при граничных условиях:

$$u(0,t)=A,\quad u(\ell,t)=B. \tag{6.I6a}$$

Сделаем замену переменных такую,чтобы новая неизвестная функция удовлетворяла однородным граничным условиям. А именно,введем функцию $v(x,t)$, связанную с искомой функцией $u(x,t)$ соотношением:

$$v(x,t)=u(x,t)-\left(\frac{B-A}{\ell}x+A\right).$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{6.I4б}$$

начальному условию

$$v(x,0)=u(x,0)-\left[\frac{B-A}{l}x+A\right]=\varphi(x)-\left[\frac{B-A}{l}x+A\right]=\varphi_1(x) \tag{6.15б}$$

и однородным граничным условиям:

$$v(0,t)=0, \quad v(l,t)=0. \tag{6.16б}$$

Однородное уравнение (6.14б) с неоднородным начальным условием (6.15б) и однородными граничными условиями (6.16б) можно решать методом Фурье совершенно так же, как мы решали задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

Будем сначала искать нетривиальные решения уравнения (6.14б), удовлетворяющие граничным условиям (6.16б), в виде произведения

$$v=X(x)T(t)\neq 0. \tag{6.17}$$

Подставляя (6.17) в уравнение (6.14б), получим

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2=const \tag{6.18}$$

в силу основной леммы метода Фурье; откуда

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{6.19}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{6.20}$$

Граничные условия (6.16б) дают

$$X(0)T(t)=0, \quad X(l)T(t)=0,$$

откуда

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{6.21}$$

Следовательно, мы приходим к задаче о собственных значениях:

$$\left.\begin{aligned} X''(x)+\lambda^2X(x)=0 \\ X(0)=0,\ X(l)=0 \end{aligned}\right\},$$

уже исследованной в § 5 п.6 при изучении колебаний однородной ограниченной струны. Там было показано, что только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1,2,3, \ldots) \tag{6.22}$$

существуют нетривиальные решения задачи (6.20) (6.21):

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.23}$$

(линейно независимые).

При $\lambda = \lambda_n$ уравнение (6.19) имеет решение в виде

$$T_n(t) = A_n e^{-b^2 n^2 t}, \tag{6.24}$$

где A_n - не определенные пока коэффициенты, а

$$b^2 = \frac{a^2\pi^2}{l^2} > 0.$$

Таким образом, согласно (6.17), каждая функция

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.25}$$

будет решением уравнения (6.14б), удовлетворяющим граничным условиям (6.16б). Тому же самому уравнению и тем же самым граничным условиям в силу принципа суперпозиции будет удовлетворять ряд:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-b^2 n^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6.26}$$

Выберем коэффициент A_n так, чтобы выполнялось начальное условие (6.15б). Полагая $t = 0$, получим

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{6.27}$$

Написанный ряд представляет собою разложение заданной функции $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Коэффициенты A_n определяются по известной формуле (6.12):

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l \left\{\varphi(x) - \left[A + \frac{B-A}{l}x\right]\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx - \frac{2}{n\pi}\left[A + (-1)^{n+1}B\right]. \tag{6.28}$$

Ряд (6.26) с коэффициентами (6.28) формально будет удовлетворять всем условиям задачи (6.I4б)- (6.I6б).

Слагаемые $v_n(x,t)$ ряда (6.26) могут быть интерпретированы как температурные волны. Амплитуда температурных волн уменьшается со временем, т.к. в нее входит множитель $e^{-b^2n^2t}$

Теперь мы можем написать окончательное решение исходной краевой задачи (6.I4а) - (6.I6а):

$$u(x,t)=A+\frac{B-A}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-b^2n^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (6.29)$$

где коэффициенты A_n выражаются формулой (6.28).

Исследуем полученное решение при $t\to\infty$.

Обозначим
$$u_\infty=\lim_{t\to\infty}u(x,t).$$

Если ряд сходится равномерно, то
$$u_\infty=A+\frac{B-A}{l}x.$$

Таким образом, предельный режим - линейное распределение температуры (рис. 7)

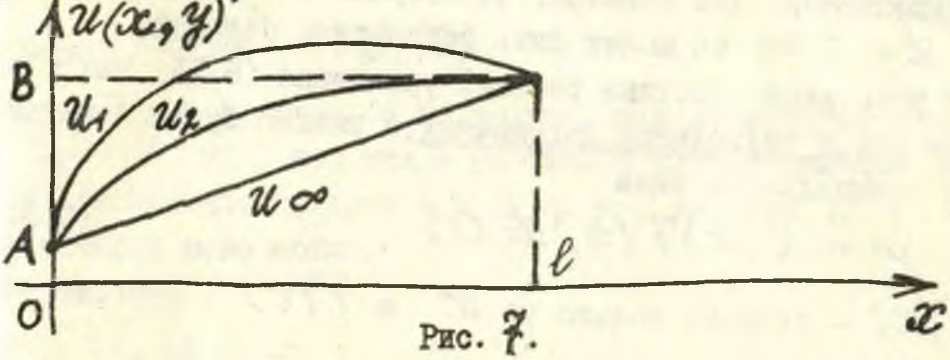


Рис. 7.

В заключение отметим, что мы ограничились лишь формальным построением решения и не будем останавливаться на выяснении условий, при которых ряд (6.29) представляет функцию, удовлетворяющую всем условиям исходной краевой задачи. Можно показать также, что эта задача поставлена корректно для $t>0$ и некорректно для отрицательных t , если начальное условие дано при $t=0$

Упражнения к главе III.

1. Решить задачу Коши для уравнения колебаний неограниченной струны:

В1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = x^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Воспользуемся формулой Даламбера (5.14). Имеем: $a=1$, $\varphi(z)=z^2$, $\psi(z)=z$. Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} z\,dz = x^2+t^2+xt$$

2. Построить профиль бесконечной струны для моментов времени: $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\alpha}{2a}$, $t_2 = \dfrac{\alpha}{a}$,

если

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{, вне } (-\alpha,\alpha) \\ x+\cancel{h}\alpha & , -\alpha\le x\le 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)=0. \\ -x+\cancel{h}\alpha & , 0\le x\le \alpha; \end{cases}$$

$\alpha=h$

<u>**Решение**</u>. По формуле Даламбера: $u(x,t_0)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{\varphi(x)}{2}$,

$$u(x,t_1)=\frac{\varphi(x+\frac{\alpha}{2})}{2}+\frac{\varphi(x-\frac{\alpha}{2})}{2},$$

$$u(x,t_2)=\frac{\varphi(x+\alpha)}{2}+\frac{\varphi(x-\alpha)}{2}.$$

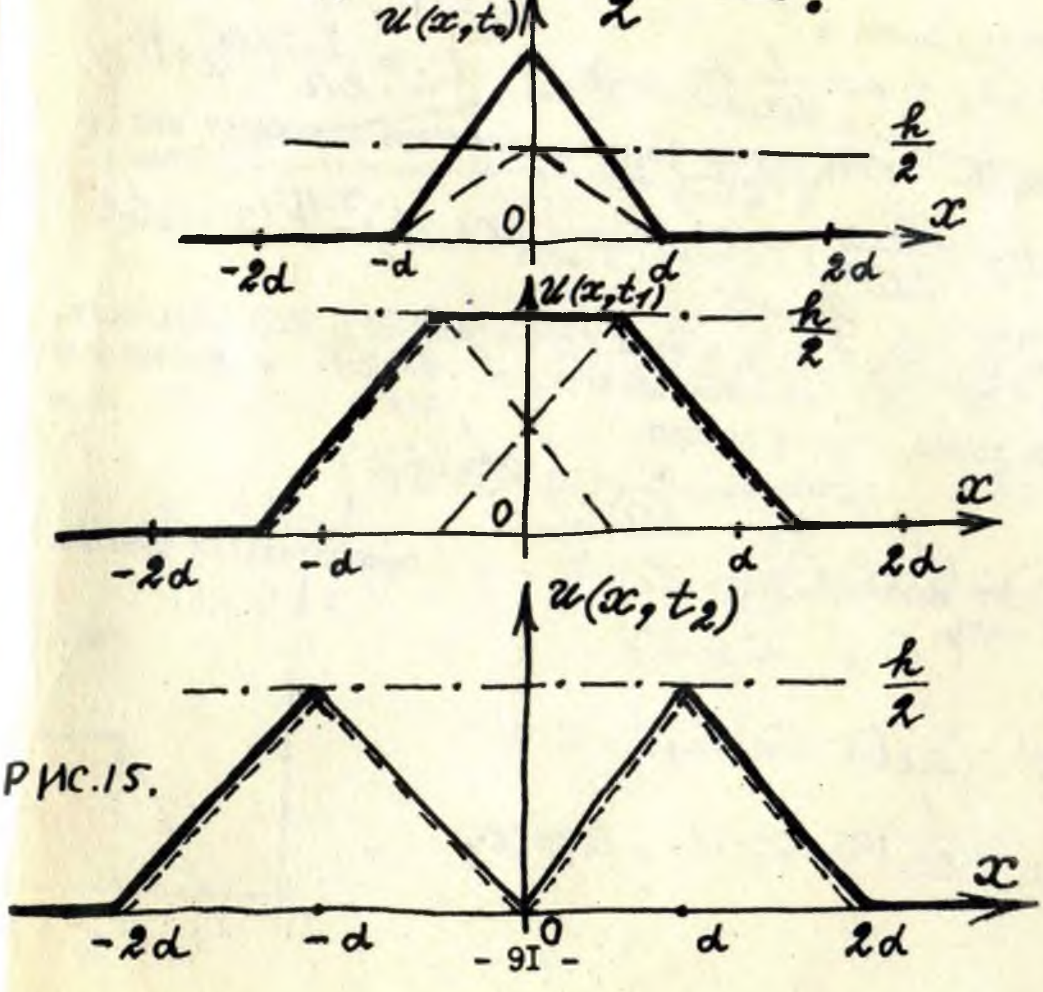


Рис.15.

Функция $u(x,t)$, представляющая распространение начального отклонения $\varphi(x)$ при нулевой начальной скорости $\psi(x)=0$, дается формулой

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{\varphi(x-at)}{2}$$

в виде суммы двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{\varphi(x)}{2}$, равной половине начального отклонения.

b2

3. Построить профиль бесконечной струны, если начальное отклонение её равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где она принимает постоянное значение:

$$u(x,0)=\varphi(x)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cancel{\psi(x)}=\begin{cases}\psi_0 & \text{, если } x_1\le x\le x_2,\\ 0 & \text{, вне } [x_1,x_2]\end{cases}$$

для моментов времени

$x_1=4,\ x_2=12$

$$t_0=0,\ t_1=\frac{1}{4a}(x_2-x_1),\ t_2=\frac{1}{2a}(x_2-x_1).$$

Решение. В этом случае формула Даламбера принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz=\Psi(x+at)-\Psi(x-at).$$

Функция $u(x,t)$ и в этом случае дается в виде двух волн, причем $\Psi(x)$ является интегралом $\psi(z)$ и представляет профиль волны, идущей налево:

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(z)dz$$

Нам будет удобно выбрать $x_0=x_1$. Вспомогательная функция имеет вид:

$$\Psi(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1,\\ \frac{1}{2a}(x-x_1)\psi_0, & x_1\le x\le x_2\\ \frac{1}{2a}(x_2-x_1)\psi_0, & x\ge x_2\end{cases}$$

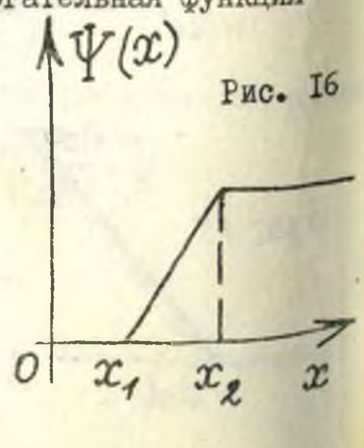


Рис. I6

Для получения функции $u(x,t)$ мы должны взять разность левой и правой волн, определяемых функцией $\Psi(x)$. Изобразим последовательные положения этих волн и их разности в различные моменты времени t (рис. I7).

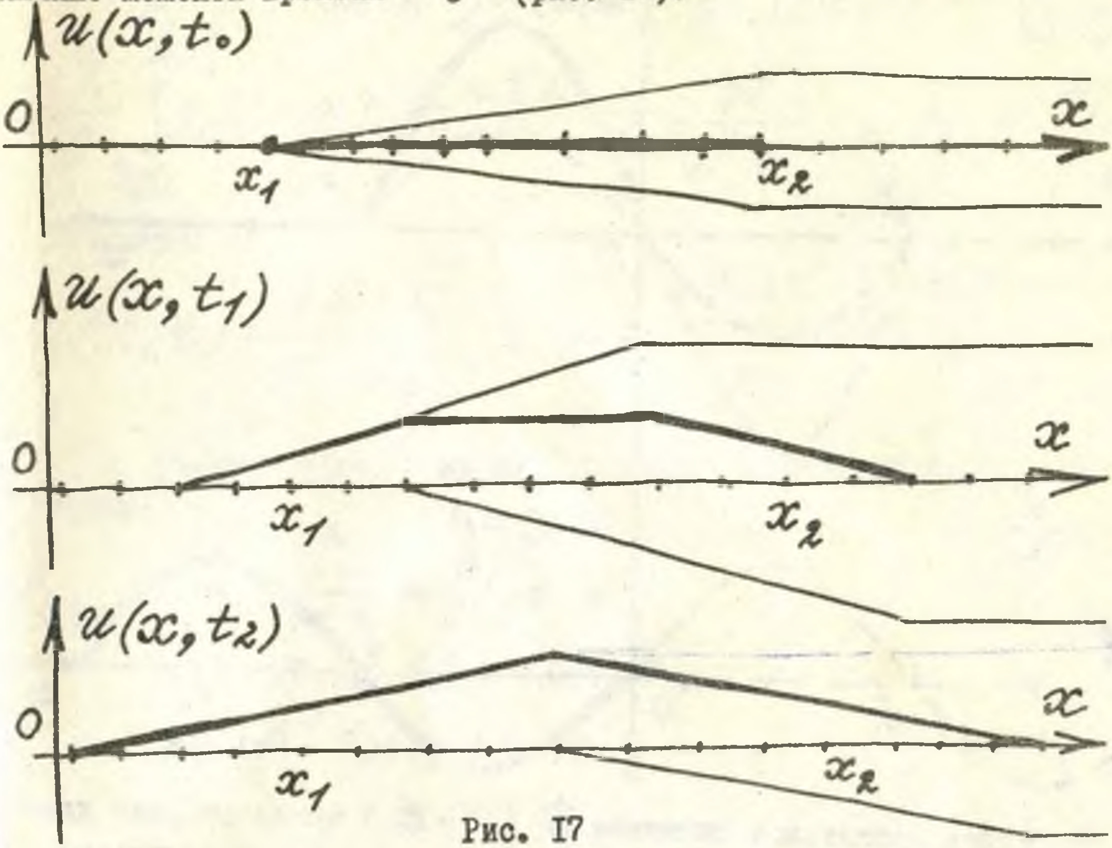


Рис. I7

4. Построить профиль струны $u(x,t)$ с закрепленным концом $u(0,t) = 0$ для моментов $t_0=0, t_1=\frac{l}{a}$,
если $0 < x < +\infty$;

$$u(x,0)=\begin{cases} Ax(l-x), & 0\le x\le l, \\ 0, & x>l; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$$

$t_2 = \frac{2l}{a}$
$t_3 = \frac{3l}{a}$
$t_4 = \frac{4l}{a}$

Решение. Решение этой задачи будет получено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую (рис. I8).

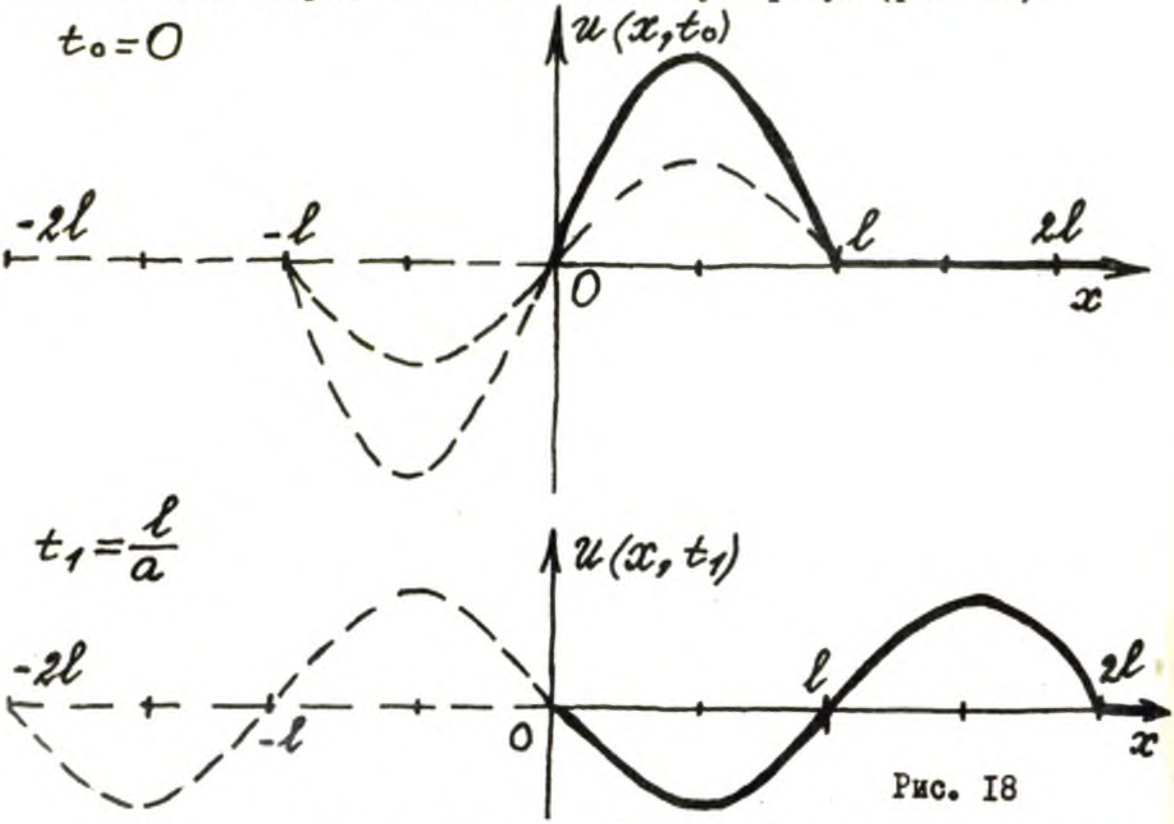


Рис. I8

5. Найти продольное смещение $u(x,t)$ точек стержня длиной l, жестко закрепленного с обеих концов, если начальное смещение

Б1 3)

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} 2x, & \text{если } 0<x\le \frac{l}{2}, \\ 2(l-x), & \text{если } \frac{l}{2}<x<l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

Решение. Это - первая краевая задача для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0<x<l, \; t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \\ u(0,t)=u(l,t)=0. \end{cases}$$

Её решение представляется в виде ряда Фурье (5,30) с коэффициентами A_n и B_n, вычисляемыми по формулам (5,33):

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}2x\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx+$$

$$+\frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}2(\ell-x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{8\ell}{n^2\pi^2}, \quad B_n=0.$$

Следовательно,

$$u(x,t)=\frac{8\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi at}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

6. Решить задачу Коши для уравнения колебаний неограниченной струны:

в3

а) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(x,0)=\sin x,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;\end{cases}$$ N1.2

в4

б) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(x,0)=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=A\sin x;\end{cases}$$ N2.2

в5

в) $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(x,0)=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=e^{x}.\end{cases}$$ N3.3

7. Построить профиль бесконечной сруны для моментов времени
N4.3 $t_0=0,\ t_1=\frac{\ell}{2a},\ t_2=\frac{\ell}{a}$, если

66
$$u(x,0)=\begin{cases} A\cos\frac{\pi x}{2\ell}, & |x|<\ell, \\ 0, & |x|>\ell; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

8. Построить профиль бесконечной сруны для моментов времени
N5.3 $t_0=0,\ t_1=\frac{1}{4a},\ t_2=\frac{2}{4a},\ t_3=\frac{3}{4a},\ t_4=\frac{4}{4a}$,

если

67
$$u(x,0)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x|\le 1, \\ 0, & \text{если } |x|>1; \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

9. Построить профиль струны $u(x,t)$ с закрепленным концом: $u(0,t)=0,\ (0\le x<+\infty)$

N6.3

68 для моментов времени

$$t_0=0,\ t_1=\frac{c}{a},\ t_2=\frac{3c}{2a},\ t_3=\frac{2c}{a},$$

если начальные скорости отсутствуют, а начальное отклонение имеет вид, изображенный на рисунке 19

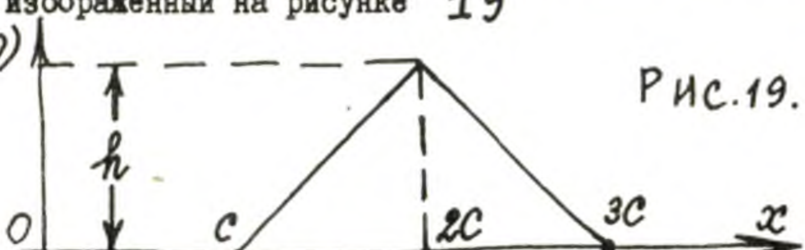


Рис.19.

h=c

10. Построить профиль струны с закрепленным концом $u(0,t)=0$ для моментов времени $t=0,\ t=\frac{\ell}{a}$, если $0\le x<+\infty$,

N7.3

69
$$u(x,0)=\begin{cases} A\sin\frac{\pi x}{\ell}, & 0<x\le\ell, \\ 0, & x>\ell; \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

11. Построить профиль струны $u(x,t)$ с закрепленным концом: $u(0,t)=0$ для моментов времени №8?

$$t_0=0,\ t_1=\frac{l}{2a},\ t_2=\frac{l}{a},\ t_3=\frac{2l}{a},$$

если ?

$$u(x,0)=\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi(l-x)}{2l}, & x\le l, \\ 0, & x>l; \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad (0\le x<+\infty).$$

12. Полуограниченная однородная струна $0\le x<+\infty$ с закрепленнвм концом $x=0$ возбуждена начальным отклонением

В10 №9?

$$u(x,0)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l, \\ -\sin\dfrac{\pi x}{l}, & l\le x\le 2l, \\ 0, & 2l\le x<+\infty. \end{cases}$$

Определить графически форму струны в моменты времени

$$t_1=\frac{l}{4a},\ t_2=\frac{l}{a},\ t_3=\frac{3l}{2a}.$$

13. Полуограниченная струна $0\le x<+\infty$ в начальный момент времени имеет форму: 10

В11

$$u(x,0)=\begin{cases} 0, & x\le c, \\ \dfrac{h}{c}(x-c), & c\le x\le 2c, \\ -\dfrac{h}{c}(x-3c), & 2c\le x\le 3c, \\ 0, & x\ge 3c; \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad (h>0,\ c>0).$$

Начертить профиль струны в моменты времени

$$t_1=\frac{c}{a},\ t_2=\frac{2c}{a},\ t_3=\frac{3c}{a},\ t_4=\frac{7c}{2a},$$

(a - скорость распространения колебаний по струне).

К!

I4. Найти закон колебания однородной струны длины $l=\pi$ с жестко закрепленными концами, если начальное отклонение $\varphi(x)=\sin x$, а начальная скорость равна нулю.

I5. Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра. Концы трубки закрыты жесткими непроницаемыми перегородками.

Найти смещение $u(x,t)$ частиц газа при $t>0$, если начальное смещение имеет вид

$$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l}, \quad (0\le x\le l),$$

а начальные скорости равны

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=B\sin\frac{\pi x}{l}, \quad (0\le x\le l).$$

I6. Методом Фурье решить первую краевую задачу для уравнения колебаний:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \end{cases}$$

если

№1 В2 3) а) $\varphi(x)=0;\ \psi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{l};$

б) $\varphi(x)=0;\ \psi(x)=1.$

В3 3) I7. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x=\frac{l}{2}$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

В4 3)

Указание. Начальное отклонение точек струны равно

$$\varphi(x)=\frac{4hx(l-x)}{l^2}\ , \text{ где } h=u\left(\frac{l}{2},0\right).$$ $\varphi(x)=x(l-x)$ $h=\frac{l^2}{4}$

18. Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством

65
3)

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{h}{x_0}x\ , & \text{если } 0\le x\le x_0,\\ \frac{h(x-l)}{x_0-l}\ , & \text{если } x_0\le x\le l;\end{cases}$$

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонение $u(x,t)$ при $t>0$.

19. Продольные колебания стержня длины l, у которого один конец (при $x=0$) закреплен жестко, а другой (при $x=l$) свободен, определяются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ – продольное смещение точки стержня с абсциссой x в момент времени t, граничными условиями

$$u\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0$$

при любом t и начальными условиями при $t=0$:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).$$

Найти функцию $u(x,t)$ при начальных условиях:

а) $\varphi(x)=kx,\ \psi(x)=0;$

66 б) $\varphi(x)=0,\ \psi(x)=v_0.$

3)

20. Трубка длиной l содержит растворенное вещество с начальной концентрацией

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0<x\le \frac{l}{2}, \\ l-x, & \text{если } \frac{l}{2}\le x<l. \end{cases}$$

Найти концентрацию $C\ (x,t)$ вещества при $t>0$, если на концах трубки она поддерживается равной нулю.

Решение. Это - первая краевая задача для уравнения диффузии:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, & 0<x<l,\ t>0, \\ C(x,0)=\varphi(x), & 0<x<l, \\ C(0,t)=C(l,t)=0, & t>0. \end{cases}$$

Решение её определяется рядом Фурье

$$C(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\eta t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

с коэффициентами Фурье, вычисляемыми по формуле:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

Следовательно,

$$C(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}\eta t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

21. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Концы стержня поддерживаются при температуре равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$, если начальная температура равна

$$\varphi(x)=A\sin\frac{2\pi}{l}x.$$

22. Методом Фурье решить краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \ 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

23. Решить первую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t > 0, \end{cases}$$

если:

б7 з) а) $\varphi(x) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{l^2}\right);$

б) $\varphi(x) = \dfrac{x}{6l} - \dfrac{x^2}{4l^2} + \dfrac{x^3}{12l^3}.$ №4.3

в8 з)

24. Растворенное вещество с начальной концентрацией $C_0 = const$ диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$ и $x = l$, $(l > h)$. Определить концентрацию $C(x,t)$ вещества в момент времени $t > 0$, предполагая, что границы $x = 0$ и $x = l$ непроницаемы для вещества, то есть №5.3

в9 з) $$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l} = 0.$$

25. Решить краевую задачу:

в10 з) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < l; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$ №6.3 $\varphi(x) = kx$

№7.3

в 11, 3)

26. Пусть в пластине, перпендикулярной оси Ox $(0 \le x \le \ell)$, распространяющейся бесконечно в направлениях Oy и Oz и имеющей начальную температуру $\varphi(x)$, внезапно стенки охладились до температуры окружающей среды u_0.

Найти зависимость $u(x,t)$ между температурой и временем от начала охлаждения для различных точек пластины.

Рассмотреть случай постоянной начальной температуры $\varphi(x) = u_1$.

27. <u>Задача о массопроводности</u>

Пусть сосуд с единичным поперечным сечением и высотою ℓ заполнен раствором соли. Этот сосуд с содержимым погружен в емкость с большим количеством воды, так что открытый край сосуда находится непосредственно под поверхностью воды. Примем, что верхний край сосуда всегда находится в соприкосновении с чистой водой. Здесь протекает процесс диффузии соли в соответствии с законом Фурье:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

где $C(x,t)$ – концентрация соли в растворе;
γ – коэффициент диффузии;
t – время;
x – высота слоя раствора в сосуде.

Граничные и начальные условия процесса:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad C\big|_{x=\ell} = 0, \quad C\big|_{t=0} = C_0.$$

Определить концентрацию соли $C(x,t)$ в зависимости от времени и от высоты слоя жидкости в сосуде.

Найти выражение для концентрации диффундирующего вещества в различных частях сосуда после того, как процесс массопроводности установился.

28. При рассмотрении процесса взаимной диффузии двух газов возникает следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0<x<l, \; t>0; \\ u\big|_{t=0} = 1, \; 0<x<l; \\ u\big|_{x=0} = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \; t>0; \end{cases}$$

где функция $u(x,t)$ определяет парциальное давление одного из газов.

Найти решение этой краевой задачи.

29. На границе круга $x^2+y^2 \le R^2$ температура распределяется по закону $u = y^2$. Найти распеределение температуры внутри круга, предполагая, что оно стационарно.

Решение. Это задача Дирихле для круга:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u\big|_C = y^2, \end{cases}$$

где C - окружность $x^2+y^2=R$. На этой окружности

$$y^2 = f(\varphi) = R^2 \sin^2\varphi = \frac{R^2}{2}(1-\cos 2\varphi).$$

Решение рассматриваемой задачи представляется рядом (7.26):

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

с коэффициентами a_n и b_n, определяемыми по формулам (7.29):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2}{2}(1-\cos 2\varphi)\cos n\varphi \, d\varphi.$$

Следовательно, $a_0 = R^2, \; a_n = -\frac{R^2}{2}\delta_{n2}, \; b_n = 0,$

где
$$\delta_{n2} = \begin{cases} 1, \text{ если } n=2, \\ 0, \text{ если } n \ne 2, \end{cases}$$

а, значит, $u = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi =$

$$= \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

30. Найти значение гармонической функции в центре круга $x^2+y^2\le R^2$, если на его границе $u=|x|$.

Решение. Зная значение функции на окружности

$$u=|x|=R|\cos\psi|,$$

применив теорему о среднем, получим

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R|\cos\psi|\,d\psi=\frac{R}{\pi}\int_{0}^{\pi}|\cos\psi|\,d\psi=$$

$$=\frac{R}{\pi}\left\{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\psi\,d\psi\right\}=\frac{2R}{\pi}.$$

31. Построить все однородные гармонические полиномы, степени не выше второй.

32. Решить задачу Дирихле для круга радиуса R с центром в начале координат, если заданы следующие граничные условия:

а) $u|_{r=R}=A$; б) $u|_{r=R}=A\cos\varphi$;

в) $u|_{r=R}=A\sin\varphi$; г) $u|_{r=R}=A+B\sin\varphi$;

д) $u|_{r=R}=A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi$; е) $u|_{r=R}=A\sin^3\varphi+B$,

где A и B - постоянные, (r,φ) - полярные координаты.

33. Найти решение уравнения Лапласа внутри круга радиуса R, если на границе круга заданы условия:

а) $u\Big|_{r=R}=A+By$; б) $u\Big|_{r=R}=Axy$.

34. Найти функцию $u(r,\varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга с центром в начале координат и радиуса R, если на границе этого круга

$$u\Big|_{r=R}=\begin{cases}A\sin\varphi, & 0\le\varphi\le\pi,\\ \frac{1}{3}A\sin^3\varphi, & \pi\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

35. Найти функцию $u=u(x,y)$, гармоническую внутри круга $x^2+y^2\leq x+y$ и принимающую на его границе значения:

а) $u=x$; б) $u=y$.

36. Найти функцию $u=u(x,y)$, гармоническую внутри круга $x^2+y^2\leq 1$ и принимающую на его границе значение $u=x^3$.

37. Найти значение гармонической функции $u=u(x,y)$ в центре круга $x^2+y^2\leq 4$, если на его границе она принимает значение

$$u=xy.$$

38. Найти значение гармонической функции $u(x,y)$ в центре круга $x^2+y^2\leq x$, если на его границе она принимает значение

$$u=x+y.$$

39. Определить стационарное распределение температуры внутри кольца $R_1<r<R_2$, если на окружности $r=R_1$ поддерживается температура $u=u_1$, а на окружности $r=R_2$ температура $u=u_2$.

ГЛАВА IУ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 8. Аппроксимация функций

I. Расстояние между функциями

Пусть на отрезке $a\leq x\leq b$ заданы две непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Определение I. Абсолютным отклонением функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется число

$$\Delta(\varphi,\psi)=\max_{a\leq x\leq b}\delta(x), \tag{8.1}$$

где:
$$\delta(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|. \tag{8.2}$$

Если $\Delta(\varphi,\psi)\leq\varepsilon$, то из формул (8.I) и (8.2) следует, что $|\varphi(x)-\psi(x)|\leq\varepsilon$ для всех точек x на отрезке $[a,b]$.

т.е. график этой функции целиком находится в ε - полосе около графика другой функции (рис. 20).

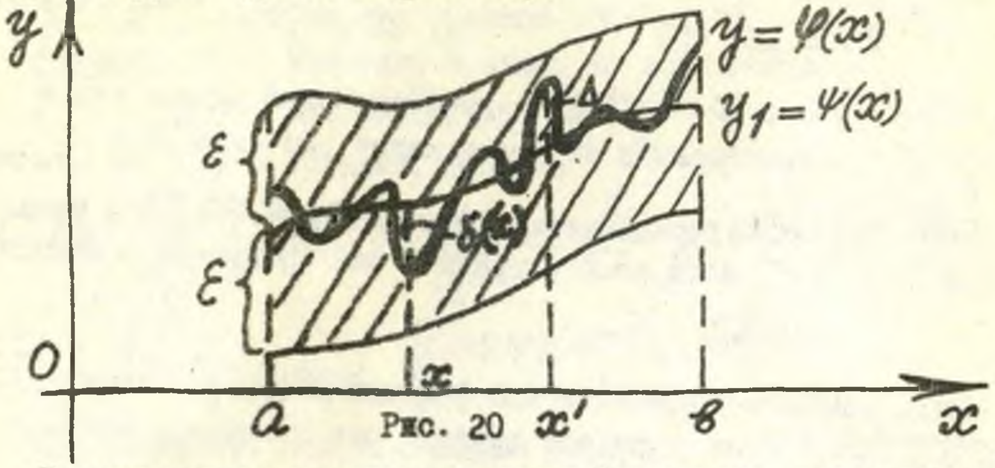


Рис. 20

Введем другое расстояние между функциями, так называемое <u>среднее квадратичное отклонение</u>. Выберем на отрезке $[a, b]$ систему равноотстоящих точек

$$a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i = h, \; h=\dfrac{b-a}{n}.$

<u>Определение.2</u>. Средним квадратичным отклонением функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется число

$$\Delta(\varphi,\psi)=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\varphi(x_i)-\psi(x_i)\right]^2} \qquad (8.3)$$

Так как $\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{b-a}h=\dfrac{1}{b-a}\Delta x_i,$

то $$\Delta^2(\varphi,\psi)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\varphi(x_i)-\psi(x_i)\right]^2\Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2dx, \qquad (8.4)$$

т.е. /см.(I.3) / ж);

$$\Delta(\varphi,\psi)=\|\varphi(x)-\psi(x)\|. \qquad (8.5)$$

Пусть $\Delta(\varphi,\psi)\le\varepsilon$. Это означает, что "подавляющего большинства" значений аргумента x на отрезке $[a, b]$ (т.е. в "среднем" на $[a, b]$) абсолютная величина $\delta(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|$ также мала (рис. 20).

ж) Если не учитывать множителя $\dfrac{1}{b-a}$.

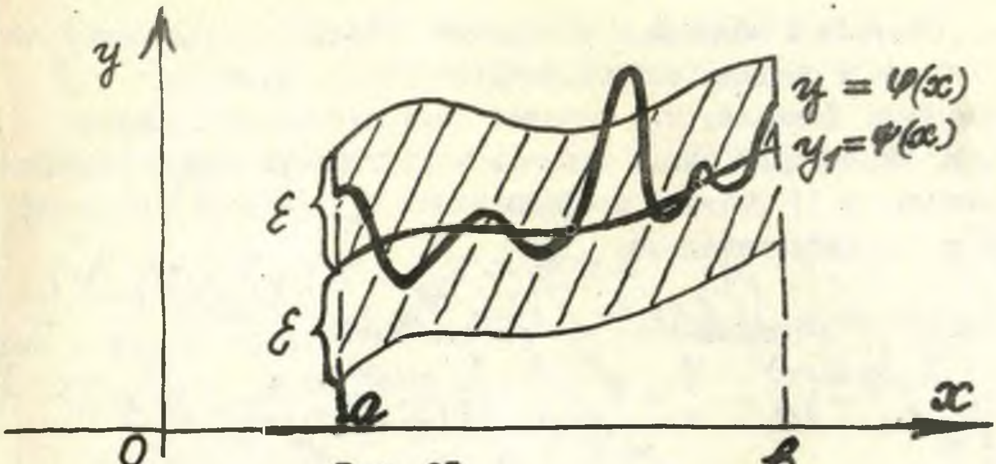


Рис. 21

2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье

Пусть даны в промежутке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ и ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \delta_{mn}; \tag{8.6}$$

составим обобщенный полином

$$P_n(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x), \tag{8.7}$$

где: $a_1, \ldots a_n$ - постоянные коэффициенты.

Поставим следующую задачу: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) обобщенным полиномом $P_n(x)$ (8.7) так, чтобы среднее квадратное отклонение (8.4) функции $f(x)$ от $P_n(x)$ на интервале $/a, b/$ было наименьшим, т.е.

$$\Delta^2(f, P_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = min. \tag{8.8}$$

Этого можно достичь, вообще говоря, за счет надлежащего выбора коэффициентов a_n аппроксимирующего полинома $P_n(x)$.

Введем для данной функции $f(x)$ коэффициенты Фурье

$$C_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx \qquad (m = 1, \ldots n) \tag{8.9}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Обобщенный полином с коэффициентами Фурье наилучшим образом в среднем аппроксимирует данную функцию.

Доказательство. Докажем, что среднее квадратичное отклонение (8.8) будет минимально, если выбрать коэффициенты аппроксимирующего полинома (8.7) равными коэффициентам Фурье (8.9), т.е. $a_n = C_n$. Действительно,

$$\Delta^2(f, P_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big[f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m(x)\Big]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big\{\int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{m=1}^{n} a_m \int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^b \Big(\sum_{m=1}^{n} a_m \varphi_m(x)\Big)^2 dx\Big\} = \frac{1}{b-a}\Big\{\int_a^b f^2(x)dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} a_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x)dx - 2\sum_{m=1}^{n} a_m \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx +$$

$$+ 2\sum_{1\le k<m\le n} a_m a_k \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_k(x)dx\Big\}. \qquad (8.10)$$

Воспользовавшись соотношениями (8.6) и (8.9), получим

$$\Delta^2(f, P_n) = \frac{1}{b-a}\Big\{\int_a^b f^2(x)dx + \sum_{m=1}^{n} a_m^2 - 2\sum_{m=1}^{n} a_m C_m\Big\} =$$

$$= \frac{1}{b-a}\Big\{\int_a^b f^2(x)dx + \sum_{m=1}^{n}(a_m - C_m)^2 - \sum_{m=1}^{n} C_m^2\Big\}. \qquad (8.11)$$

Величина $\int_a^b f^2(x)dx$ и $\sum_{m=1}^{n} C_m^2$ не зависит от выбора коэффициента a_m, поэтому $\Delta^2(f, P_n) = min$ только при

$$\sum_{m=1}^{n}(a_m - C_m)^2 = 0,$$

т.е. при $a_m = C_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, ч.т.д.

3. Полнота и замкнутость системы ортогональных функций

Рассмотрим в промежутке $a \le x \le b$ ортонормированную систему функций $\{\varphi_n(x)\}$:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \delta_{mn} \qquad (8.12)$$

Пусть в том же промежутке задана кусочно-непрерывная функция $f(x)$. Построим обобщенный полином n степени

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k(x) \qquad (8.13)$$

с коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно заданной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$:

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx \qquad (8.14)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Используя соотношения (8.11), найдем отклонение обобщенного полинома (8.13) от функции $f(x)$:

$$\Delta^2(f, P_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right\}. \qquad (8.15)$$

Пусть $n \to \infty$. Если при этом $\Delta(f, P_n) \to 0$, то система ортонормированных функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется <u>полной</u>. В противном случае, система называется неполной. Очевидно, что в первом случае имеет место аппроксимация функции с любой степенью точности.

<u>Определение</u>. Система ортогональных функций называется полной, если с помощью этой системы любую кусочно-непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности.

Для полной системы, в силу соотношения (8.15),

$$\lim_{n \to \infty}\left[\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right] = 0,$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx \qquad (8.16)$$

Это равенство называется <u>равенством Парсеваля</u> или <u>условием полноты</u>.

Итак, система ортогональных функций является полной тогда и только тогда, если для каждой кусочно-нерерывной функции выполняется равенство Парсеваля. Например, полную систему образуют тригонометрические функции, для которых справедлива следующая теорема.

Теорема Ляпунова. Основная тригонометрическая система функций (2.I) является полной на любом промежутке, равном общему периоду функций.

Для любой системы ортогональных и нормированных функций из формулы (8.I5) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (n \to \infty),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{8.I7}$$

Полученное соотношение называется неравенством Бесселя.

Таким образом, для всякой системы ортогональных и нормированных функций выполняется неравенство Бесселя.

Определение. Система ортогональных функций называется замкнутой, если не существует функций с нулевой нормой, ортогональных ко всем функциям системы

Теорема. Система ортогональных функций является полной тогда и только тогда, когда она замкнута.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ - полная система ортонормированных функций. Предположим, что эта система не замкнута. Тогда существует функция $\psi(x)$ такая, что

$$\int_a^b \varphi_n(x)\psi(x)\,dx = C_n = 0; \quad (n=1,2,\dots) \tag{8.I8}$$

причем

$$\int_a^b \psi^2(x)\,dx \neq 0. \tag{8.I9}$$

Но в силу условия полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ и равенства (8.I8)

$$\int_a^b \psi^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 = 0,$$

что противоречит (8.I9). Таким образом, полная система замкнута.

Пусть теперь система $\{\varphi_n(x)\}$ - замкнутая. Предположим, что она неполная, т.е. существует функция $f(x)$, для которой справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \int_a^b f^2(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 > 0. \tag{8.19}$$

Построим функцию

$$\psi(x) = f(x) - \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x), \text{ x)} \tag{8.20}$$

для которой в силу неравенства (8.19) норма

$$\|\psi(x)\| > 0$$

Коэффициенты Фурье этой функции относительно данной ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ равны нулю:

$$a_n = \int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} c_m \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n - c_n = 0. \tag{8.21}$$

Откуда

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_m(x)\,dx = 0. \tag{8.22}$$

Таким образом, мы построили функцию с ненулевой нормой, ортогональную всем функциям системы $\{\varphi_n(x)\}$. Но это невозможно, т.к. система замкнутая. Теорема доказана. (Доказательство нестрогое, т.к. не доказана возможность почленного интегрирования ряда в соотношении (8.21)).

4. Квадратичная аппроксимация функции

Пусть данную функцию $f(x)$ нужно аппроксимировать на отрезке $a \le x \le b$ с помощью обобщенного полинома

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x), \tag{8.23}$$

---

x) Здесь доказательство теоремы проводится при упрощенном предположении, что ряд Фурье $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x)$ сходится где $C_к$ - постоянные коэффициенты, а $\{\varphi_n(x)\}$ - заданная система непрерывных функций.

Согласно способу наименьших квадратов коэффициенты $C_к$ ($к = 1,2,\dots,n$) подбираются так, чтобы квадратичное отклонение полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, равное

$$J=\int_a^b\Big[f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\Big]^2dx, \tag{8.24}$$

было минимально.

Так как интеграл (8.24) определенный, то J не зависит от x. Для нахождения минимума функции

$$J=J(c_1,c_2,\dots,c_n)$$

приравняем нулю частные производные

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}=0,\ \frac{\partial J}{\partial c_2}=0,\dots,\frac{\partial J}{\partial c_n}=0. \tag{8.25}$$

Тем самым, мы получили систему для определения коэффициентов C_1, C_2, ..., C_n. Можно доказать, что если функции $\{\varphi_k(x)\}$ ($k = 1,2,\dots,n$) линейно независимы в промежутке $a\le x\le b$, то система уравнений (8.25) имеет единственное решение, которое соответствует минимуму квадратичного отклонения J.

Пример. Функцию $f(x)=\sqrt{x}$ квадратично аппроксимировать на отрезке $0\le x\le 1$ линейной функцией $P(x) = a+bx$.

Решение. Найдем коэффициенты a и b, для которых

$$J=\int_0^1(a+bx-\sqrt{x})^2dx=\min.$$

Для нахождения минимума функции $J(a,b)$, как известно, нужно приравнять нулю частные производные по а и в, Это дает следующую систему для определения коэффициентов а и в:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial a}&=\int_0^1(a+bx-\sqrt{x})\cdot 1\,dx=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial b}&=\int_0^1(a+bx-\sqrt{x})\cdot x\,dx=0\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}a\int_0^1dx+b\int_0^1x\,dx&=\int_0^1\sqrt{x}\,dx,\\ a\int_0^1x\,dx+b\int_0^1x^2dx&=\int_0^1x\sqrt{x}\,dx\end{aligned}\right\}.$$

Вычисляя интегралы, приведем систему к виду

$$\left.\begin{aligned} a+\frac{1}{2}b&=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b&=\frac{2}{5}\end{aligned}\right\},$$

откуда, $a=\frac{4}{15}$; $b=\frac{4}{5}$.

и, следовательно,

$$P(x)=\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x.$$

9. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов

Предположим, что в результате эксперимента, мы получили ряд точек (рис. 22), которые определяют некоторую функциональную зависимость.

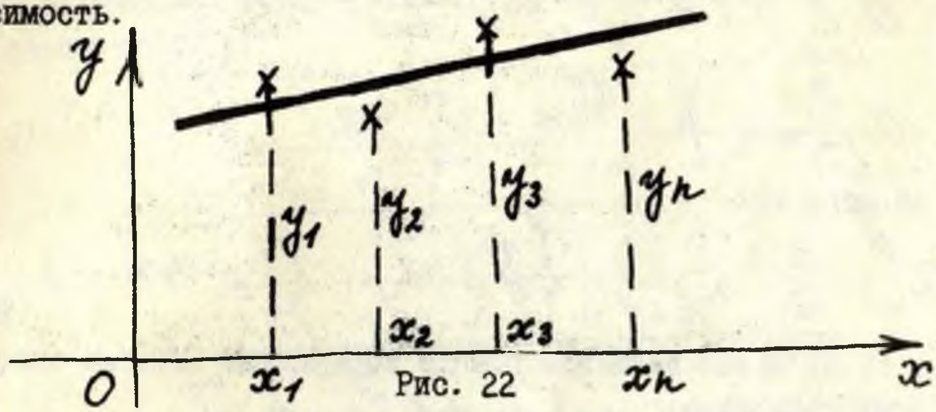


Рис. 22

Пусть, например, эта зависимость описывается эмпирической формулой вида

$$y=ax+b. \tag{9.1}$$

Решим задачу: подобрать коэффициенты a и в так, чтобы значения эмпирической формулы (9.1) при $x=x_i$ возможно мало отличались бы от опытных данных y_i ($i=1,\dots n$).

Пусть

$$\Delta_i=ax_i+b-y_i \quad (i=1,\dots n) \tag{9.2}$$

- уклонения эмпирической формулы (9.1) от исходных данных (x_i,y_i).

Согласно способу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами a и в считаются те, для которых сумма квадратов уклонений

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = S(a,b) \tag{9.3}$$

будет минимальной.

Очевидно, в случае минимума

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$$

Откуда мы получим систему для определения коэффициентов a и в :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)\, x_i = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Введя обозначения:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = S_p, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^p y_i = t_p \quad (p = 0, 1, \ldots) \tag{9.5}$$

систему (9.4) можно записать в виде нормальной системы способа наименьших квадратов:

$$\left.\begin{aligned} aS_2 + bS_1 &= t_1 \\ aS_1 + bS_0 &= t_0 \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Пример: Используя способ наименьших квадратов, вывести эмпирическую формулу для функции $y(x)$ задаваемой таблицей:

x	1	2	3
y	1	3	4

Решение. На плоскости xOy данная система точек (x_i, y_i) примерно располагается на прямой линии (рис. 23).

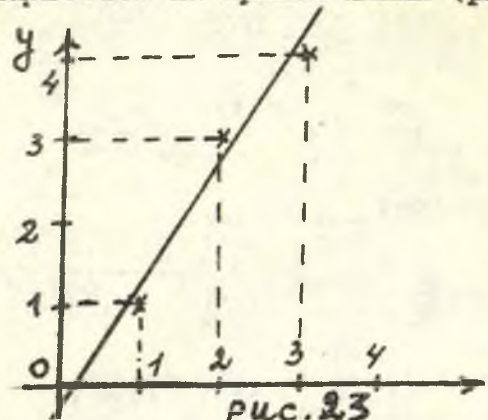


рис. 23

Поэтому будем искать эмпирическую формулу в виде $y = ax + b$.

Для получения нормальной системы способа наименьших квадратов составим таблицу:

	x^0	x^1	x^2	y	$x \cdot y$
$i=1$	1	1	1	1	1
$i=2$	1	2	4	3	6
$i=3$	1	3	9	4	12
	3	6	14	8	19
	(S_0)	(S_1)	(S_2)	(t_0)	(t_1)

Следовательно, в данном случае система (9.6) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} 14a + 6b &= 19 \\ 6a + 3b &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Откуда

$$a = 1\frac{1}{2}; \quad b = -\frac{1}{3};$$

и таким образом

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}.$$

4. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$

5. $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$

6. $f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx.$

7. $f(x)=\frac{A+B}{2}+\frac{2}{\pi}(B-A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$

8. $f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

I2. $f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$

I3. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$

I4. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x.$

I5. $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$

I6. а) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\cos nx}{n}.$

I7. а) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$; б) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

23. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x.$

24. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\sin nx.$

25. $f(x)=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right].$

26. $f(x)=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right).$

27. а) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$; б) $f(x)=1$.

28. а) $\frac{2\ell}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$; б) $\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\ell}}{(2n+1)^2}$.

29. $$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x.$$

30. $$f(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

31. а) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$$

б) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

в) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

г) $$f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

д) $$f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda.$$

е) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$$

ж) $$f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda.$$

з) $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

и) $$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2\lambda\sin\lambda+\cos\lambda-1}{\lambda^2}\cos\lambda x+\frac{\sin\lambda-\lambda}{\lambda^2}\sin\lambda x\right)d\lambda.$$

32. а) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda,\quad (0\le x<+\infty);$$

б) $$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda,\quad (0<x<+\infty).$$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ ГЛАВЫ II

5. а) $u(x,y)=F_1(x)+F_2(y)$;

б) $u(x,y)=F_1(x)+F_2(y)+\frac{x^2y^2}{4}$;

в) $u(x,y)=F_1(x)+F_2(y)+\frac{x^2}{2}\ln|y|$;

г) $u(x,y)=F_1(x)+F_2(y)e^{ax}$;

д) $u(x,y)=F_1(x)+F_2(y)e^{\frac{x^3}{3}}$;

е) $u(x,y)=F_1(x)+\frac{F_2(y)}{x}$;

ж) $u(x,y)=xF_1(y)+F_2(y)$,

где F_1 и F_2 – произвольные функции.

6. $u(x,y)=F_1(x+\lambda_1 y)+F_2(x+\lambda_2 y)$, где $\lambda_{1,2}$ – корни уравнения $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$.

7. $u(x,y)=F(x^2+y^2)$,

где F – произвольная функция

8. $u(x,y)=xF\left(\frac{y}{x}\right)$,

где F – произвольная функция.

9. а) Гиперболический тип; $\frac{y}{x}=C_1$, $xy=C_2$;

б) Параболический тип; $x+y=C$;

в) Гиперболический тип; $xy=C_1$, $\frac{x^3}{y}=C_2$;

г) Эллиптический тип;

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\pm\ln(y+\sqrt{1+y^2})=C_{1,2}.$$

10. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$, $\left(\xi=\dfrac{x^2}{2}+y,\ \eta=x\right)$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, $\left(\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ \eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right)$;

в) Уравнение эллиптично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится заменой

$$\xi=y^2,\quad \eta=x^2$$

к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

11. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$; $\xi=3x+y,\ \eta=x+y$;

$$u(x,y)=F_1(3x+y)+F_2(x+y);$$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0$; $\xi=xy,\ \eta=\dfrac{y}{x}$;

$$u(x,y)=F_1\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{2xy}+F_2(xy);$$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$; $\xi=\dfrac{y}{x},\ \eta=y$; $u(x,y)=yF_1\left(\dfrac{y}{x}\right)+F_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

где F_1 и F_2 - произвольные функции.

12. а) $u(x,y)=F_1(x-2\sqrt{y})+F_2(x+2\sqrt{y})$;

б) $u(x,y)=yF_1(2x+y)+F_2(2x+y)$;

в) $u(x,y)=F_1(x+2y)e^{-\frac{1}{3}(x-y)}+F_2(x-y)$;

г) $u(x,y)=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\,F_1(xy)+F_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

д) $u(x,y)=F_1(x+y-\cos x)+F_2(x-y+\cos x)$.

13. а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{1}{3\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0$; $\xi=x,\ \eta=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, $(y>0)$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0;\ \xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\ \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},$$

$(y<0)$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\dfrac{2\alpha-1}{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0;\ \xi=x,\ \eta=2\sqrt{y},\quad (y>0);$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\xi-\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0;\ \xi=x-2\sqrt{-y},\ \eta=x+2\sqrt{-y},\quad (y<0).$$

14. а) $u(x,y)=F\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right);$

б) $u(x,y)=F_1\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)\sqrt{x^2+y^2}+F_2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right);$

в) $u(x,y)=F_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+F_2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$

15. $u(x,y)=1+x^2y+y^2-2x^4.$

16. а) $u=1+xy+y^2;$ б) $u=y^2+Bxy+A\sin x;$

в) $u=x^2y^3+xy+y^2;$ г) $u=Be^x+A-B.$

17. $u(x,y)=3x^2+y^2.$

<u>Указание</u>. Общее решение уравнения есть

$$u(x,y)=F_1(x+y)+F_2(3x-y),$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции.

18. $u(x,y)=\varphi\left(x-\frac{2}{3}y^3\right)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y}\psi(z)\,dz.$

19. $$u(x,y)=\frac{\varphi(-y+\sin x+x)+\varphi(y-\sin x+x)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-y+\sin x+x}^{y-\sin x+x}\psi(z)\,dz.$$

<u>Указание</u>. Общее решение уравнения есть

$$u(x,y)=F_1(y-\sin x-x)+F_2(y-\sin x+x),$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции.

20. $$u(x,y)=\frac{3}{4}\varphi(x\sqrt[3]{y})+\frac{1}{4}y\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+$$

$$+\frac{3}{16}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\varphi(x)x^{-\frac{7}{4}}dx-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int\limits_{x\sqrt[3]{y}}^{\frac{x}{y}}\psi(x)x^{-\frac{7}{4}}dx.$$

6\. а) $u(x,t)=\sin x\cos t$; б) $u(x,t)=\frac{A}{a}\sin x\sin at$;

в) $u(x,t)=\frac{e^x}{2}\,\mathrm{sh}\,2t$.

I4\. $u(x,t)=\sin x\cos at$

I5\. $u(x,t)=\left(A\cos\frac{\pi at}{\ell}+\frac{B\ell}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{\pi x}{\ell}$.

I6\. а) $u(x,t)=\frac{\ell}{\pi}\sin\frac{\pi}{\ell}t\,\sin\frac{\pi}{\ell}x$.

б) $u(x,t)=\frac{2\ell}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)}{2\ell}\pi at\,\sin\frac{(2n+1)}{2\ell}\pi x$.

I7\. $u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)}{\ell}\pi at\,\sin\frac{(2n+1)}{\ell}\pi x$.

$h=\ell^2/4$?

I8\. $u(x,t)=\frac{2h\ell^2}{\pi^2 x_0(\ell-x_0)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x_0}{\ell}\cos\frac{\pi n at}{\ell}\sin\frac{\pi n x}{\ell}$.

I9\. а) $u(x,t)=\frac{8k\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2\ell}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$;

б) $u(x,t)=\frac{8v_0\ell}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2\ell}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$.

20\. $C(x,t)=\frac{4\ell}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\ell^2}a^2 t}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{\ell}x$. (см. стр. 100)

21. $u(x,t) = Ae^{-\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{2\pi x}{\ell}.$

22. $u(x,t) = e^{-t}\sin x.$

23. а) $u(x,t) = \frac{12\ell}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3} e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell};$ $\frac{12\ell}{(\pi n)^4}(-1)^{n+1}$

б) $u(x,t) = \frac{1}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$

24. $C(x,t) = C_0\left[\frac{h}{\ell} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{\ell} e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \eta t} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\right].$

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (0<x<\ell,\ t>0)$$

при условиях:

$$C(x,0) = \begin{cases} C_0, & 0<x<h, \\ 0, & h<x<\ell; \end{cases} \quad \frac{\partial C}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial C}{\partial x}(\ell,t) = 0.$$

25. $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t}\cos\frac{n\pi x}{\ell},$

где $$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

26. $u(x,t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell},$

где $A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx - \frac{2u_0}{n\pi}\left[1+(-1)^{n+1}\right].$

При $\varphi(x) = u_1$:

$$u(x,t) = u_0 + \frac{4(u_1-u_0)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2 t}{\ell^2}} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}.$$

9

$$27.\; c(x,t) = \frac{4C_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\, e^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2 \pi^2 \eta t} \cos\frac{(2n+1)}{2l}\pi x.$$

При установившемся процессе

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0.$$

Следовательно,

$$C = Ax + B,$$

где A и B - постоянные, которые можно определить экспериментально.

$$28.\; U(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, e^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2 \pi^2 \eta t} \sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x.$$

31. Воспользоваться формулой (7.23) при $n = 0,1,2$.

32. а) $u = A;$ б) $u = \frac{A}{R} r\cos\varphi;$

в) $u = \frac{A}{R} r\sin\varphi;$ г) $u = A + \frac{B}{R} r\sin\varphi;$

д) $u = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\cos 2\varphi\right) + \frac{B}{2}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\cos 2\varphi\right);$

е) $u = B + \frac{3A}{4R} r\sin\varphi - \frac{1}{4}A\left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin 3\varphi.$

<u>Указание.</u> $\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$

33. а) $u = A + By;$ б) $u = Axy;$

34. $$u(r,\varphi) = A\frac{r}{R}\sin\varphi - \frac{8A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}\frac{\cos 2n\varphi}{4n^2-9}.$$

35. а) $u = x;$ б) $u = y.$

36. $u = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x.$

37. $u(0,0) = 0.$

38. $u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}.$

39. <u>Указание</u>. Искать решение в виде:

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

где C_1 и C_2 находятся из условий на границе кольца.

Литература

I. А.Н.Тихонов и А.А.Самарский. "Уравнения математической физики". М., ГИТТЛ, 1953.

2. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, М.; т.П ГИТТЛ, 1956.

3. М.М.Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М., "Наука", 1964.

4. Ю.С.Очан. Методы математической физики. М., "Высшая школа", 1965.

5. Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. Численные методы анализа, М., Ф.-М., 1963.

6. М.М.Смирнов. Задачи по уравнениям математической физики. М., Изд.4, Ф.-М., 1961.

7. Ю.С.Очан. Сборник задач по методам математической физики.М., "Высшая школа", 1967.

8. И.В.Мисюркеев. Сборник задач по методам математической физики. М., "Просвещение", 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

05.09
2012
Л.1

Ортогональные системы функций.

Пусть φ и ψ интегрируемы на $[a, b]$. Введем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Если $(\varphi, \psi) = 0$, то φ и ψ наз-ся ортогональными ($\varphi \perp \psi$).

На множестве функций со скалярным произведением можно ввести норму (естественным образом)

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$ и метрику (расстояние между функциями)

$$\rho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$$

Пусть $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ — система функций. Если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

то система называется *ортогональной*; если ещё

$$(\varphi_i, \varphi_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

то система называется *ортонормированной*.

Т.е. система Φ ортонормированная, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$ — символ Кронекера.

$\frac{1}{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, … $\cos nx$, $\sin nx$, … — тригонометрическая система функций на $[-\pi, \pi]$;

1 (или $\frac{1}{2}$), $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{\pi x}{l}$, $\cos \frac{2\pi x}{l}$, $\sin \frac{2\pi x}{l}$, …

… $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$, … — тригонометрическая система функций

1.12 на $[-l, l]$;

1.13. $\|1\|^2 = \int_{-l}^{l} 1^2 dx = 2l$; $\|\cos\frac{n\pi x}{l}\|^2 = \int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$

Упр. Проверить!

$\|\sin\frac{n\pi x}{l}\|^2 = \int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = l$;

$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = 0, \ n\neq m,$

1.14 $\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0, \ n\neq m,$

$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall n, m \in$

$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0$

$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \qquad \forall n \in N.$

$\Rightarrow$ тригонометрическая система функций на $[-l, l]$ ортогональная

Система функций

$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \ldots \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin$

— ортонормированная система функций

Если $\{\varphi_i\}$ — ортогональная сист. ф-ц
$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \ i\neq j, \ \|\varphi_i\|\neq 0 \ \forall i$, то

Упр. проверить! $\left\{\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right\}$ будет ортонормированной системой.

Ряды Фурье.

Пусть $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset R[a,b]$ ортонормированная на $[a,b]$ система функций. Всякой функции $f \in R[a,b]$ можно поставить ряд Фурье $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, где

$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = (f, \varphi_n)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i\}$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i$ – (частичные) суммы ряда Фурье (суммы Фурье).

Некоторые факты:

① при $k \le n$

$(f - S_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (S_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = 0,$

так как $(S_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k)$. $f - S_n$ ортог. $\forall \varphi_k,\ k \le n \Rightarrow f - S_n \perp P_n \ \forall P_n.$

$\Rightarrow (f - S_n, S_n) = 0.$

②

$\underbrace{\|(f - S_n) + S_n\|^2}_{\|f\|^2} = (f - S_n, f - S_n) + 2(f - S_n, S_n) + (S_n, S_n) =$

$= \|f - S_n\|^2 + \|S_n\|^2$

$\Rightarrow \|f\|^2 = \|S_n\|^2 + \|f - S_n\|^2$ – тождество Бесселя.

③

$\underbrace{\|S_n\|^2}_{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \le \|f\|^2$ (из ②)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2$ – неравенство Бесселя.

Сл. ряд из квадратов коэффициентов Фурье $\underset{\text{интегр. ф-ции}}{}$ всегда сходится.

Сл. $c_n \to 0\ (n \to \infty)$ для любой инт. f.
коэфф. Фурье по ортонорм. сист.

СБС т.2 с. 414

Эти свойства ~~следствия~~ верны и для любого пр-ва Hсо скалярным произведением и ортонормированной системы $\{e_i\}$.

$x \in H, \quad \underset{\text{ряд Ф.}}{x \sim \sum_i c_i e_i}, \quad \underset{\text{коэфф.}}{c_i = (f, e_i)}$

1.12 Если нер-во Бесселя $\sum c_i^2 \le \|x\|^2$ обращается в равенство $\|x\|^2 = \sum c_i^2$, то получаем

1.13 равенство Парсеваля.

Теорема (экстремальное свойство сумм Фурье). Пусть H — пр-во со скалярным произведением, $\{e_i\}$ — ортонормированная система, $x \sim \sum c_i e_i$ — ряд

1.14 Фурье элемента x по системе $\{e_i\}$,

$s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, $P_n = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$, тогда

$$\inf_{P_n} \|x - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_i e_i}_{P_n}\| = \|x - s_n\|;$$

наил. наилучшее приближение эл. x по сист. $\{e_i\}$

при этом $\|x - s_n\| = \|x - p_n\| \Leftrightarrow p_n = s_n$.

Доказательство.

$$\|x - p_n\|^2 = (x - p_n, x - p_n) =$$

$$= (x - s_n + (s_n - p_n), x - s_n + (s_n - p_n)) = \|x - s_n\|^2 + \|s_n - p_n\|^2$$

по свойству 1,

значит, $\|x - p_n\|^2 \ge \|x - s_n\|^2$, где "=" тогда и только тогда, когда $p_n = s_n$.

Для тригонометрической системы, $f \in R[-l, l]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$$

Исторически ~~ряд Ф~~ тригонометрический ряд (ряд Ф.) возник при изучении некоторых задач о колебании ограниченной струны. (рассмотрим)

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx.$$

Имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \quad (l = \pi);$$

принцип локализации: если f и $\tilde{f}$ совпадают на (α, β), ~~и~~ $x_0 \in (\alpha, \beta)$, то $S_n(x_0, f) - S_n(x_0, \tilde{f}) \to 0$ $(n \to \infty)$ стремятся одинаково

• теорема единственности:
если $f \sim \sum \ldots$ $g \sim \sum \ldots$
и $f \neq g$ (т.е. $\|f-g\| \neq 0$), то $c_i \neq d_i$ для некот. i,
(для непрерывных f и g во всяком случае).

• Сходимость. 1) существуют непрер. функции, ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках. 2) ряды Ф. непр. функций (даже из R^2) сходятся для большего числа точек. (т. Карлесона)

• Теорема. Пусть $f(x)$ кусочно непр. в основной области и имеет кус.-непр. первую производную. Тогда её ряд Ф. сх. $\forall x$. к знач. $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, т.е.
сх. к $f(x)$ в точке непрерывности и к полусумме знач. слева и справа в точках разрыва (I рода).

Теорема Дирихле – Жордана. Пусть f огр., 2π-периодич., кус. монотонная на периоде. Тогда ряд Ф этой ф. сх. в кажд. точке x_* к значению
$$S = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

• Т. Тригоном. ряд Ф чётной периодич. функции содержит только косинусы кратных дуг. Триг. ряд Ф. неч. ф. содержит только синусы кр. дуг.

$\Rightarrow$ f - чётн $\Rightarrow f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l}$, $a_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$

f неч. $\Rightarrow f \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos\dfrac{n\pi x}{l}$, $b_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$.

Примеры. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $-\pi < x < \pi$. Изобразить графически f и несколько частичных сум.

$f(x)$ - неч., $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,
$b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin nx\, dx = \dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n}\right]$

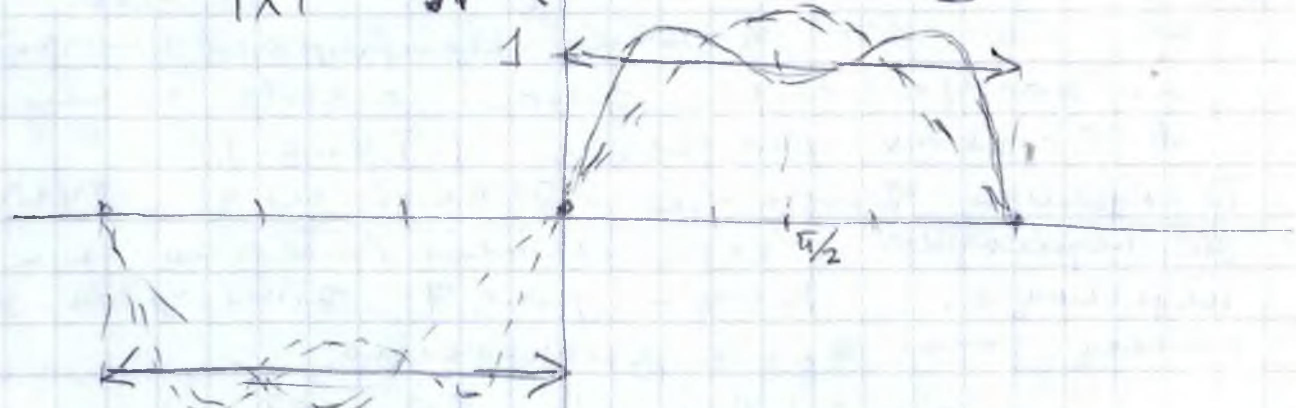
1.13 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\sin t\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(-\cos t\right)\Big|_0^{n\pi} = \frac{-2}{n\pi}$

$n = 1, 2, \ldots$ $nx = t$ $x = \pi$

$$= \frac{2}{n\pi}\begin{cases} +1 + 1 = \frac{4}{\pi} & (n=1) \\ 0 & n = 2 \\ \frac{4}{2\pi}, & n = 3 \end{cases} =$$

1.1 $$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{|x|} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right.$$



$S_1 = \frac{4}{\pi}\sin x$

$S_2 = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right)$

...

при $x = \frac{\pi}{2}$ $1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots\right) =$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}$$

четное и нечетное продолжение.

f задана на $(0, l)$ продолжим нечетным образом — получим разложение по sin, на $(-l, l)$ продолжим четным образом — получим разложение по косинусам на $(-l, l)$. На $0, l$ эти разложения будут совпадать.